Beiträge

zur

Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen

mit

spezieller Anwendung auf das Rotationsparaboloid.



Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät zu Marburg

eingereicht von

Wilhelm Werner,

Königl. Gymnasiallehrer in Ratibor.



Marburg 1886.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0056

Herrn

Professor Dr. Edmund Hess

in dankbarer Verehrung

gewidmet.

§ 1.

Ein materieller Punkt, welcher genötigt ist auf der Oberfläche einer beliebigen Rotationsfläche zu bleiben, unterliegt der alleinigen Wirkung einer Centralkraft, deren Centrum ein beliebiger Punkt der Rotationsaxe ist und welche proportional der Masse des Punktes und einer beliebigen Funktion der Entfernung wirkt. Beim Beginne besitzt der Punkt in einem gegebenen Punkte M_0 der Fläche eine Geschwindigkeit v_0 in der Richtung der an den Parallelkreis dieses Punktes gezogenen Tangente.

Wir wählen das Attraktionscentrum als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems der x, y, z, dessen x und y Axe horizontal, dessen positive z Axe vertical aufwärts gerichtet ist (Fig. 1). Dann ist die Gleichung einer beliebigen Rotationsfläche:

$$x^2 + y^2 = f(z). \qquad (1)$$

Bezeichnen wir die Intensität der Centralkraft für die Masse 1 und den Abstand 1 mit m, welches für die Anziehung negativ $= -\mu^2$, für die Abstofsung positiv $= +\mu^2$ zu setzen ist, und bedeutet r den Radiusvektor, so ist die Centralkraft $= m\,\varphi(r)$ und deren Richtungskosinus gegen die Axen resp. $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

Es möge nun $F(xyz) = 0$ die Gleichung einer festen Oberfläche sein, N die Normalkraft, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, deren Richtungskosinus gegen die Axen x, y, z und schliefslich X, Y, Z die Komponenten der Attraktionskraft längs den Axen — dann ist bekanntlich das System der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X + N \cos\alpha$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = Y + N \cos\beta$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = Z + N \cos\gamma$$

wo:

$$\cos\alpha = V \frac{dF}{dx}, \quad \cos\beta = V \frac{dF}{dy}, \quad \cos\gamma = V \frac{dF}{dz},$$

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Für unseren Fall nimmt das System der Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} &= m \frac{\varphi(r)}{r} x + 2 x \lambda \\ \frac{d^2 y}{d t^2} &= m \frac{\varphi(r)}{r} y + 2 y \lambda \\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= m \frac{\varphi(r)}{r} z - f'(z) \lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo:

$$\lambda = N V, \quad V = \pm \frac{1}{2\sqrt{f(z) + \frac{f'(z)^2}{4}}}.$$

Zunächst gilt für unser Problem das Prinzip der lebendigen Kraft wie überhaupt bei allen Attraktionsproblemen, wo die Beschleunigung nach einem festen Centrum gerichtet und eine Funktion der Entfernung des beweglichen Punktes ist. Die Beschleunigung des Widerstandes tritt bekanntlich nicht im Prinzip der lebendigen Kraft auf. Dasselbe liefert uns sofort ein Integral. Es ist nämlich die Kräftefunktion:

$$U = m \int \frac{\varphi(r)}{r} \left(x dx + y dy + z dz \right),$$

und da aus der Relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ durch Differentiation folgt:

$$x dx + y dy + z dz = r dr,$$
$$U = m \int \varphi(r)\, dr = m\, \Phi(r),$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\int \varphi(r)\, dr = \Phi(r).$$

Es ist also: $\frac{1}{2} v^2 = m\, \Phi(r) + C$

oder:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2 m\, \Phi(r) + C. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sodann aber gilt auch das Prinzip der Flächen in bezug auf die horizontale xy Ebene Es fällt nämlich sowohl die Centralkraft als die Normalbeschleunigung in die Vertikalebene, welche durch den beweglichen Punkt und die z Axe geht, es schneidet folglich die Resultante stets die z Axe und geht daher ihre Projektion in die xy Ebene durch den Koordinatenursprung. Das Flächenprinzip liefert uns also sofort ein zweites Integral:

$$x dy - y dx = C_1\, dt. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Differentiation von (1) giebt:

$$x dx + y dy = \frac{f'(z)}{2} dz.$$

Die Addition der Quadrate der beiden vorigen Gleichungen liefert:

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = C_1^2\, dt^2 \cdot + \frac{f'(z)^2}{4} dz^2.$$

Substituiert man aus (1) und (3) für $x^2 + y^2$ und $dx^2 + dy^2$ ihre Werte, so erhält man:

$$f(z) \Big[[C + 2 m\, \Phi(r)]\, dt^2 - dz^2 \Big] = C_1^2\, dt^2 + \frac{f'(z)^2}{4} dz^2,$$

woraus sofort durch Ordnen folgt:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{f(z)\,[C + 2\,m\,\Phi\,(r)] - C_1{}^2}{f(z) + \frac{f'(z)^2}{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und:

$$dt = \pm \sqrt{\frac{f(z) + \frac{f'(z)^2}{4}}{f(z)\,[C + 2\,m\,\Phi\,(r)] - C_1{}^2}} \cdot dz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo das positive Zeichen der Wurzel zu nehmen ist bei wachsendem z, das negative Zeichen bei abnehmendem z, d. h.: die Wurzel hat das positive Zeichen bei der aufsteigenden, das negative Zeichen bei der absteigenden Bewegung. Die rechte Seite von (6) ist eine Funktion von z, da nach (1)

$$r^2 = z^2 + f(z) \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die Integration der Gleichung (6) liefert, wenn wir mit z_0 den der Zeit $t = 0$ entsprechenden Wert von z bezeichnen

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{f(z) + \frac{f'(z)^2}{4}}}{\sqrt{f(z)\,[C + 2\,m\,\Phi\,(r)] - C_1{}^2}}\, dz \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und die Umkehrung:

$$z = F_1(t). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Hiernach ist für jede Zeit der Parallelkreis bestimmt, auf welchem sich der Punkt befindet. Es bleibt nun noch der Ort des Punktes auf demselben zu bestimmen, entweder durch x, y oder durch Polarkoordinaten. Wir bedienen uns der letzteren und führen den Neigungswinkel ψ der durch den Radiusvektor und die z Axe gelegten Ebene gegen die xz Ebene ein, oder, was dasselbe ist, den Winkel der Projektion r_1 des Radiusvektors r in die xy Ebene gegen die x Axe, dann geht Gleichung (4) über in:

$$r_1{}^2\, d\psi = C_1\, dt \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

oder, da nach (1) $r_1{}^2 = x^2 + y^2 = f(z)$ ist:

$$f(z)\, d\psi = C_1\, dt,$$

woraus sofort folgt:

$$d\psi = C_1 \frac{dt}{f(z)}.$$

Nehmen wir nun an, dafs der Punkt zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung aus der xz Ebene beginnt, sodafs für $t = 0$ auch $\psi = 0$ ist, so liefert die Integration der vorigen Gleichung von $t = 0$ an sofort:

$$\psi = C_1 \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{f(z)}.$$

Je nachdem man nun mittels (6) t oder mittels (9) z eliminiert, liefert dieses Integral:

$$\psi = \int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{f(z) + \frac{f'(z)^2}{4}}}{f(z)\sqrt{f(z)\left[C + 2m\,\Phi(r)\right] - C_1^2}} \cdot dz \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

oder:

$$\psi = F_2(t) \cdot \quad \cdots\cdots \quad (12)$$

Durch Substitution von (9) in (7) wird r^2 eine Funktion von t:

$$r^2 = F_3(t) \quad \cdots\cdots \quad (13)$$

und es ist demnach durch die Gleichungen (9), (12), (13) der Ort des Punktes auf der Fläche für jede Zeit t bestimmt.

Was die Art der Bewegung anlangt, so ergiebt sich aus dem doppelten Zeichen von $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ (5), d. h. der Geschwindigkeitskomponente längs der z Axe, daſs im allgemeinen die Bewegung eine auf- und absteigende (oscillatorische) sein wird — wie d ses im folgenden für ein specielles Problem gezeigt werden wird.

Die Bestimmung der Konstanten C und C' ergiebt sich einfach aus dem Anfangszustand der Bewegung in M_0, wofür $z = z_0$, $r = r_0$, $v = v_0$ ist. Es folgt demnach aus (3):

$$C = v_0^2 - 2m\,\Phi(r_0), \quad \cdots\cdots \quad (14)$$

die Konstante C_1 ergiebt sich ebenso aus (5), da im Punkte M_0 die Geschwindigkeit v_0 längs der Tangente des Parallelkreises, d. h. in einer zur z Axe senkrechten Ebene vorausgesetzt wurde, mithin deren Komponente längs der z Axe $\frac{dz}{dt} = 0$ ist. Mit Benutzung des für C gefundenen Wertes erhält man daher aus (5), indem man $\frac{dz}{dt} = 0$ setzt:

$$C_1 = v_0 \sqrt{f(z_0)} \cdot \quad \cdots\cdots \quad (15)$$

Die letztere Konstante des Flächenprinzips läſst sich auch auf anderem Wege finden. Sie bedeutet bekanntlich die doppelte konstante Sektorengeschwindigkeit für die Projektionsbewegung in der xy Ebene. Da die Anfangsgeschwindigkeit v_0 im Punkte M_0 die Richtung der Tangente des Parallelkreises z_0 hat, mithin senkrecht steht auf der durch den beweglichen Punkt und die z Axe gelegten Vertikalebene, so steht sie auch senkrecht auf dem Radiusvektor der Horizontalprojektion in der xy Ebene. Es ist demnach:

$$r_1 \frac{d\psi}{dt} = v_0,$$

ferner nach (10):

$$r_1^2 \frac{d\psi}{dt} = C_1,$$

woraus sich durch Elimination von $\frac{d\psi}{dt}$ ergiebt:

$$C_1 = v_0 r_1 = v_0 \sqrt{f(z_0)}.$$

§ 2.

Die vorstehende Integration der Bewegungsgleichungen führte mit Anwendung der Prinzipien der Flächen und der lebendigen Kraft direkt auf eine integrable Differentialgleichung I. Ordnung (5). Zu derselben Differentialgleichung gelangt man auch ohne Anwendung des Flächenprinzips durch Aufstellung einer Differentialgleichung II. Ordnung, deren Integration allgemein gelingt. Diese zweite Methode erscheint interessant genug, um hier Platz zu finden.

Multipliziert man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit x, y, z und addiert sie, so erhält man mit Hilfe von (1):

$$\frac{x\,d^2 x + y\,d^2 y + z\,d^2 z}{dt^2} = m r\,\varphi(r) + [2 f(z) - z f'(z)]\,\lambda. \qquad (16)$$

Die zweimalige Differentiation der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ liefert mit Rücksicht auf Gleichung (3):

$$\frac{x\,d^2 x + y\,d^2 y + z\,d^2 z}{dt^2} = \frac{r\,d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \qquad (17)$$

Ebenso erhält man durch Differentiation von (7):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{f'(z) + 2z}{2r} \cdot \frac{dz}{dt}. \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{2r^2[f''(z) + 2] - (f'z + 2z)^2}{4r^3}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{f'(z) + 2z}{2r} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Substituiert man diese Ausdrücke sowie für $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2$ in die Gleichung (17), so erhält man:

$$\frac{x\,d^2 x + y\,d^2 y + z\,d^2 z}{dt^2} = \frac{f'(z) + 2z}{2}\,\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f''(z) + 2}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - v^2$$

und durch Kombination mit (16):

$$\frac{f'(z) + 2z}{2}\,\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f''(z) + 2}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2 + m r\,\varphi(r) + [2 f(z) - z f'(z)]\,\lambda.$$

Eliminiert man schliefslich noch mit Hilfe der dritten Bewegungsgleichung (2) λ, so resultiert nach einigen Umformungen folgende Differentialgleichung II. Ordnung in z und t:

$$\frac{4f(z) + f'(z)^2}{2f'(z)} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f''(z) + 2}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2 + m r\,\varphi(r) + 2m\,\frac{\varphi(r)}{r}\,\frac{z f(z)}{f'(z)} - m\,\frac{\varphi(r)}{r}\,z^2.$$

Setzt man auf der rechten Seite aus (7) für $z^2 = r^2 - f(z)$, so nimmt diese die Form an:

$$v^2 + m\,\frac{\varphi(r)}{r}\,f(z) \cdot \frac{2z + f'(z)}{f'(z)},$$

und da nach (18) $2z + f'(z) = 2r \cdot \frac{dr}{dz}$ ist:

$$v^2 + 2m\,\varphi(r)\,\frac{f(z)}{f'(z)}\left(\frac{dr}{dz}\right).$$

Substituiert man nun aus (3) für v^2 seinen Wert, so erhält man die Differentialgleichung II. Ordnung in der Form:

$$\frac{4f(z) + f'(z)^2}{2f'(z)} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f''(z) + 2}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2m\,\Phi(r) + 2m\,\varphi(r)\,\frac{f(z)}{f'(z)} \cdot \frac{dr}{dz} + C.$$

Diese Differentialgleichung hat, wie man sich leicht überzeugt, den integrierenden Faktor:

$$2f'(z) \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{2\,d \cdot f(z)}{dt}.$$

Durch Multiplikation mit demselben werden beide Seiten vollständige Differentialien, nämlich:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{4f(z)+f'(z)^2}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = 2\left\{\frac{d}{dt}\left[f(z)\cdot 2m\,\Phi(r)\right] + C\cdot\frac{d\,f(z)}{dt}\right\}.$$

Die Integration liefert sofort, wenn wir die Integrationskonstante C_2 nennen:

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{f(z)\left[C+2m\,\Phi(r)\right]+C_2}{f(z)+\frac{f'(z)^2}{4}}}.$$

Diese Differentialgleichung ist dieselbe wie (5), sie unterscheidet sich nur durch C_2, die Integrationskonstante der Differentialgleichung II. Ordnung. Die Konstante C rührt wie oben von dem Prinzip der lebendigen Kraft her und hat dieselbe Bedeutung. Für C_2 ergiebt sich wie oben für $\frac{dz}{dt} = 0$.

$$C_2 = -v_0{}^2 f(z_0),$$

d. h. $C_2 = -C_1{}^2$. Die beiden Differentialgleichungen stimmen also vollständig überein.

§ 3.

Anwendung auf das Rotationsparaboloid.

Gehen wir nun zur speciellen Anwendung jener Theorie auf das Rotationsparaboloid über. Ein materieller Punkt, welcher genötigt ist auf der Oberfläche eines Rotationsparaboloids zu bleiben, sei der alleinigen Wirkung einer Centralkraft unterworfen, deren Centrum der Scheitel des Paraboloids ist und welche proportional der Masse und Entfernung wirkt. Beim Beginne besitzt der Punkt in einem gegebenen Punkte M_0 der Fläche eine Geschwindigkeit v_0 längs der Tangente des diesem Punkte entsprechenden Parallelkreises. Wie ist die Bewegung dieses Punktes beschaffen, wenn von Reibung abgesehen wird, im Falle, dafs die Kraft anziehend wirkt?

Die Gleichung des Rotationsparaboloids sei:

$$x^2 + y^2 = pz,$$

wo p der Hauptparameter der Erzeugungsparabel ist; dann ist unter Beibehaltung derselben Bezeichnungsweise wie oben:

$$\varphi r = r, \quad fz = pz, \quad f'(z) = p, \quad f''(z) = 0.$$

Durch Substitution dieser Werte in (2) erhält das System der Bewegungsgleichungen folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= mx + 2x \cdot \lambda \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= my + 2y \cdot \lambda \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= mz - p \cdot \lambda, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

wo:

$$\lambda = NV. \quad V = \pm \frac{1}{2\sqrt{p}\sqrt{z + \frac{p}{4}}}.$$

Ferner ist:

$$\Phi(r) = \frac{r^2}{2}. \quad U = \frac{mr^2}{2}$$

und also geht (3) über in:

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = mr^2 + C. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Die Formeln (5), (6), (8) nehmen die Form an:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{z(mr^2 + C) - \frac{C_1{}^2}{p}}{\left(z + \frac{p}{4}\right)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\left(z + \frac{p}{4}\right)}{z(mr^2 + C) - \frac{C_1{}^2}{p}}} \cdot dz,$$

wo das positive Zeichen der aufsteigenden, das negative Zeichen der absteigenden Bewegung des Punktes entspricht,

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{z + \frac{p}{4}}}{\sqrt{z(mr^2 + C) - \frac{C_1{}^2}{p}}} \cdot dz, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

wo nach (7)

$$r^2 = z^2 + pz. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

Gleichung (11) endlich geht über in:

$$\psi = \frac{C_1}{p} \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{z} = \frac{C_1}{p} \int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{z + \frac{p}{4}}}{z\sqrt{z(mr^2 + C) - \frac{C_1{}^2}{p}}} dz, \quad \ldots \ldots (24)$$

wo wir wie oben annehmen, dafs der Punkt zur Zeit $t = 0$ sich in der xz Ebene befindet.

Die Integrationskonstanten C (14), C_1 (15) nehmen den Wert an:

$$\left.\begin{aligned} C &= v_0{}^2 - m r_0{}^2 \\ C_1 &= v_0 \sqrt{p z_0} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Von besonderer Wichtigkeit für unsere weiteren Entwickelungen sind nun die Formeln (21), (22), (24). Die beiden Quadraturen in (22) und (24) führen, da das Polynom der Wurzel des Nenners in z vom dritten Grade ist, auf elliptische Integrate zurück. Um dieselben auf die Normalform zu bringen, ist daher zunächst eine sorgfältige Untersuchung der Wurzelgröfse des Nenners nötig, welche überdies schon für sich allein einige wichtige Aufschlüsse über die Bewegung zu geben geeignet ist.

Diese Untersuchung gestaltet sich sehr einfach. Setzt man nämlich für C und C_1 aus (25) ihre Werte ein, so erhält man für den Radikanden des Nenners:

$$R = z\,(m r^2 + C) - \frac{C_1{}^2}{p} = \left[\, v_0{}^2 + m\,(r^2 - r_0{}^2) \,\right] z - v_0{}^2 z_0.$$

Substituiert man aus (23) für r^2 seinen Wert in z, so ist:

$$R = v_0{}^2 (z - z_0) + m\,[(z^2 - z_0{}^2) + p\,(z - z_0)]\,z,$$

und wenn man $m\,(z - z_0)$ als Faktor trennt:

$$R = m\,(z - z_0)\left(z^2 + (z_0 + p)\,z + \frac{v_0{}^2}{m}\right).$$

Es nehmen somit die Gleichungen (21), (22), (24), wenn man in den beiden letzteren Zähler und Nenner mit $\sqrt{z + \frac{p}{4}}$ multipliziert, folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{m\,(z - z_0)\left[z^2 + (p + z_0)\,z + \frac{v_0{}^2}{m}\right]}{\left(z + \frac{p}{4}\right)}}, \\ t &= \int_{z_0}^{z} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{\sqrt{m\left(z + \frac{p}{4}\right)(z - z_0)\left[z^2 + (p + z_0)\,z + \frac{v_0{}^2}{m}\right]}}, \\ \psi &= \frac{C_1}{p} \int_{z_0}^{z} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{z\sqrt{m\left(z + \frac{p}{4}\right)(z - z_0)\left[z^2 + (p + z_0)\,z + \frac{v_0{}^2}{m}\right]}}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Da wir uns mit dem Falle der Anziehung beschäftigen, so haben wir zu setzen $m = -\mu^2$, und es kommt nun zunächst auf die genaue Diskussion der Wurzeln der Gleichung

$$R = m\left(z + \frac{p}{4}\right)(z - z_0)\left[z^2 + (z_0 + p)\,z - \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2\right] = 0.$$

an. Dieselbe hat, wie man sofort sieht, die Wurzeln $z = -\frac{p}{4}$ und $z = z_0$. Die beiden anderen Wurzeln liefert die Gleichung:

$$z^2 + (z_0 + p)\,z - \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = 0,$$

nämlich:

$$z_1 = \alpha = -\frac{z_0 + p}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_0 + p}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2}$$

$$z_2 = \beta = -\frac{z_0 + p}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_0 + p}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2}.$$

Die Gröſse dieser Wurzeln hängt ab von der Gröſse der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Es ergiebt sich leicht folgendes Schema von zusammengehörigen Werten:

$\frac{v_0}{\mu} = 0.$	$\alpha = 0.$	$\beta = -(p + z_0).$
$\frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$	$\alpha < z_0.$	$\beta > -(2 z_0 + p)$
$\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$	$\alpha = z_0.$	$\beta = -(2 z_0 + p)$
$\frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$	$\alpha > z_0.$	$\beta < -(2 z_0 + p)$
$\frac{v_0}{\mu} = \infty.$	$\alpha = +\infty.$	$\beta = -\infty.$

Man sieht hieraus, daſs α stets positiv, β stets negativ ist, so zwar, daſs mit wachsendem $\frac{v_0}{\mu}$ α von 0 bis $+\infty$ zunimmt und β von $-(p + z_0)$ bis $-\infty$ abnimmt. Eine besondere Rolle spielt hierbei der kritische Wert $\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$ Für diesen Wert fällt nämlich die Wurzel α mit z_0 zusammen. Für jeden kleineren Wert von $\frac{v_0}{\mu}$ ist $\alpha < z_0$, für jeden gröſseren Wert von $\frac{v_0}{\mu}$ ist $\alpha > z_0$.

Wir wollen im folgenden unter β stets den positiven Wert der Wurzel z_2 verstehen, also setzen $z_2 = -\beta$, sodaſs nun:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{z_0 + p}{2}\right)^2} - \frac{z_0 + p}{2}$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{z_0 + p}{2}\right)^2} + \frac{z_0 + p}{2}.$$

Man kann nun setzen:

$$\sqrt{R} = \sqrt{\mu^2 (z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)},$$

sodafs für die Anziehung die Formeln (26) die Form annehmen:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\mu^2 (z_0 - z)(z - \alpha)(z + \beta)}{\left(z + \frac{p}{4}\right)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{\sqrt{\mu^2 (z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

$$\psi = \frac{C_1}{p} \int_{z_0}^{z} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{z\sqrt{\mu^2 (z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Es möge noch bemerkt werden, dafs im Falle einer beliebig gerichteten Anfangsgeschwindigkeit v_0 sich diese zerlegen läfst in zwei Componenten, von denen die eine senkrecht steht zu der durch M_0 und die z Axe gelegten Vertikalebene, die andere in dieser Ebene liegt. Es ist demnach, wenn α den Neigungswinkel der Anfangsgeschwindigkeit gegen die Senkrechte auf der Vertikalebene bedeutet, die erstere Componente $= v_0 \cos \alpha$ und tangential zum Parallelkreis M_0 gerichtet. Dieser Wert tritt einfach an Stelle unseres obigen v_0. Die Gleichung $R = 0$ hat nun wegen $\alpha\beta = + \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2$ unter allen Umständen zwei positive Wurzeln. Es ist demnach die Annahme, dafs für $t = 0$ nur eine horizontale Geschwindigkeit vorhanden sei keine Beschränkung der Aufgabe.

§ 4.

Damit nun t reell sei, dürfen für z nur solche Werte gewählt werden, welche R positiv machen. Dieses ist der Fall für:

$$\alpha < z < z_0 \text{ und } z_0 < z < \alpha.$$

Also nur für Werte von z zwischen α und z_0 giebt es ein reelles t und ψ, d. h. die Bewegung kann diese Grenze nicht überschreiten.

Der erste Fall $\alpha < z < z_0$ tritt ein, wenn $\alpha < z_0$, d. h. $\frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$. Der zweite Fall $z_0 < z < \alpha$ tritt ein, wenn $\alpha > z_0$, d. h. $\frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$.

Die Wurzeln α und z_0 bestimmen also zwei Niveauebenen, welche auf dem Paraboloid zwei Grenzkreise bezeichnen, zwischen denen die Bewegung vor sich geht. Werden die Wurzeln α und z_0 einander gleich, d. h. ist $\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$, so geht die Zone, zwischen welcher sich der Punkt bewegt, in einen Kreis über, in welchem der Punkt rotieren wird.

Es fragt sich nun: Ist t für $z = z_0$ endlich oder unendlich, d. h. ist das Produkt von $(z - z_0)$ in die Funktion unter dem Integral

$$\frac{(z - z_0)\left(z + \frac{p}{4}\right)}{\mu \sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}}$$

für $z = z_0$ Null oder endlich? Da sich als Grenzwert eine endliche Gröfse: $\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}$ ergiebt, so folgt daraus, dafs der Punkt in dem Grenzfalle $z_0 = \alpha$ unaufhörlich in dem Kreise $z = z_0$ rotieren wird.

Daraus ergiebt sich schon die Vermutung, dafs der Punkt im ersten Falle gleichfalls zwischen den beiden Grenzebenen unaufhörlich oscillieren wird. In der That folgt dieses aus einer genaueren Untersuchung der Differentialquotienten $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{d^2 z}{dt^2}$. Es ist:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{m(z - z_0)(z - \alpha)(z + \beta)}{\left(z + \frac{p}{4}\right)}},$$

woraus sich durch nochmalige Differentiation nach einigen Umformungen mit Berücksichtigung der Relationen $(\alpha - \beta) = -(p + z_0)$ und $\alpha\beta = -\frac{v_0^2}{m}$ ergiebt:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{m}{2}\left\{\frac{(z - \alpha)(z + \beta)}{\left(z + \frac{p}{4}\right)} + (z - z_0)\frac{z^2 + \frac{p}{4}(2z + p + z_0) - \frac{v_0^2}{m}}{\left(z + \frac{p}{4}\right)^2}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

$\frac{dz}{dt}$, d. h. die Komponente der Geschwindigkeit des Punktes in Beziehung auf die z Axe, zeigt, dafs vermöge des doppelten Vorzeichens die Bewegung eine auf- und absteigende sein wird. Diese Geschwindigkeitskomponente wird Null für $z = z_0$ und $z = \alpha$, wo

$$\alpha < z_0 \text{ für } \frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$$

$$\alpha > z_0 \text{ für } \frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

In diesem Falle hat also der Punkt keine Geschwindigkeit in der Richtung der z Axe, sondern nur senkrecht dazu, d. h. in der Ebene der Parallelkreise $z = z_0$ und $z = \alpha$. Die Bahn des Punktes berührt also in diesen Punkten die Grenzkreise.

Betrachten wir nun $\frac{d^2 z}{dt^2}$, d. h. die Komponente der Beschleunigung in Beziehung auf die z Axe, so ist, wenn man $m = -\mu^2$ setzt, für $z = z_0$ nach (30):

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{(z_0 - \alpha)(z_0 + \beta)}{z_0 + \frac{p}{4}}.$$

Also:

$$1)\ <0, \text{ wenn } z_0 > \alpha, \text{ d. h. } \frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

$$2)\ >0, \text{ wenn } z_0 < \alpha, \text{ d. h. } \frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

$$3)\ =0, \text{ wenn } z_0 = \alpha, \text{ d. h. } \frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

Für $z = \alpha$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{2}(\alpha - z_0)\frac{\alpha^2 + \frac{p}{4}(2\alpha + p + z_0) + \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2}{\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)^2}.$$

Also:

$$1)\ <0, \text{ wenn } \alpha > z_0, \text{ d. h. } \frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

$$2)\ >0, \text{ wenn } \alpha < z_0, \text{ d. h. } \frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

$$3)\ =0, \text{ wenn } \alpha = z_0, \text{ d. h. } \frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}.$$

Daraus ergiebt sich aber, da $\frac{dz}{dt}$ nur für $z = z_0$ und $z = \alpha$ Null wird, dafs wenn $\frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$, also $\alpha < z_0$ ist, der bewegliche Punkt vom höchsten Punkte $z = z_0$ sich abwärts bewegt bis zum tiefsten Punkte $z = \alpha$, dann von diesem wieder aufwärts steigt bis zum höchsten Punkte $z = z_0$ u. s. f.

Dagegen, wenn $\frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$, also $\alpha > z_0$ ist, der bewegliche Punkt von dem tiefsten Punkte $z = z_0$ zu dem höchsten $z = \alpha$ steigen, dann wieder zum tiefsten Punkte $z = z_0$ fallen wird u. s. f.

Also: der bewegliche Punkt wird zwischen den beiden Grenzebenen $z = z_0$ und $z = \alpha$ oscillieren.

Der Fall $\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$ stellt den Übergangsfall dar, die Bewegung tritt dann aus dem Parallelkreis $z = z_0$ nicht heraus, sondern der Punkt rotiert in diesem unaufhörlich.

Untersuchen wir nun die Geschwindigkeit des Punktes auf seiner Bahn. Gleichung (20) nimmt durch Substitution von C (25) und r^2 aus (23) die Form an:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + m(r^2 - r_0^2) = v_0^2 + m(z - z_0)(z + z_0 + p) \\ &= v_0^2 + \mu^2 z_0(z_0 + p) - \mu^2 z(z + p) = v_0^2 + \mu^2(z_0 - z)(z + z_0 + p). \end{aligned}$$

Also wächst v, wenn z abnimmt, d. h. wenn $\alpha < z_0$, und erreicht im Punkte $z = \alpha$ das Maximum:

$$v^2 = v_0^2 + \mu^2(z_0 - \alpha)(\alpha + z_0 + p) = v_0^2 + \mu^2(z_0 - \alpha)\beta, \quad \cdots\cdots \quad (31)$$

da aus $(\alpha - \beta) = -(z_0 + p)$ folgt: $\beta = \alpha + z_0 + p$.

Dagegen nimmt v ab, wenn z zunimmt, d. h. $\alpha > z_0$ ist, und erreicht im Punkte $z = \alpha$ das Minimum:

$$v^2 = v_0^2 - \mu^2 (\alpha - z_0) \beta.$$

Für $z_0 = \alpha$ wird $v = v_0$, d. h. die Geschwindigkeit konstant.

Daraus folgt, dafs für $\frac{v_0}{\mu} < \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$, d. h. $\alpha < z_0$, der bewegliche Punkt vom höchsten Punkte $z = z_0$ sich mit beschleunigter Geschwindigkeit abwärts bewegt, im tiefsten Punkte $z = \alpha$ das Maximum erreicht, sodann mit verzögerter Geschwindigkeit aufsteigt, in z_0 wieder seine Anfangsgeschwindigkeit erreicht u. s. f.

Dagegen, wenn $\frac{v_0}{\mu} > \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$, also $\alpha > z_0$, der bewegliche Punkt vom tiefsten Punkte z_0 mit verzögerter Geschwindigkeit aufsteigt, im höchsten Punkte $z = \alpha$ das Minimum erreicht und sodann mit beschleunigter Geschwindigkeit sich abwärts bewegt, bis er wieder in z_0 die Anfangsgeschwindigkeit erreicht u. s. f.

Es sei noch bemerkt, dafs das Minimum in $z = \alpha$ nie die Grenze Null erreichen kann.

Im Übergangsfall $\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$ endlich rotiert der Punkt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 im Parallelkreis $z = z_0$.

Für diesen Fall der gleichförmigen Bewegung im Kreise z_0, dessen Radius $= \sqrt{p z_0}$ ist, ergiebt sich die Umlaufszeit des Punktes:

$$T' = \frac{2 \pi \sqrt{p z_0}}{v_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

oder, wenn man statt $\frac{v_0}{\mu}$ seinen Wert $\sqrt{2 z_0^2 + p z_0}$ einführt:

$$T' = 2 \cdot \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2 z_0 + p}}.$$

§ 5.

Normaldruck. Gehen wir nun zur Untersuchung der Normalkraft N über. Es ist dieses bekanntlich diejenige Kraft, welche den Punkt in jedem Augenblicke nötigt, auf der Fläche zu bleiben. Sie ersetzt den Widerstand der Fläche und bestimmt als selbständige Kraft in Verbindung mit der Centralkraft die Bewegung des nun als frei zu betrachtenden Punktes. Ihr Einflufs als selbständige Kraft tritt besonders deutlich hervor in der Erscheinung, dafs der Punkt trotz der Anziehung nach dem Scheitel eine aufsteigende Bewegung annehmen kann, wie es für $z_0 < \alpha$ der Fall ist. Die Bewegung des Punktes wird eben nur durch die Resultante der Normalkraft und Centralkraft bestimmt. Je nachdem diese im Punkte M_0 nach einem Punkte unterhalb z_0 oder oberhalb oder nach z_0 selbst gerichtet ist, bewegt sich der Punkt abwärts, aufwärts oder im Parallelkreis z_0.

Die Bestimmung von N ergiebt sich am einfachsten aus der dritten Bewegungsgleichung (19), welche nach Einsetzung von V lautet:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = mz \mp \frac{\sqrt{p}\cdot N}{2\sqrt{z+\frac{p}{4}}}.$$

Indem man aus (30) für $\frac{d^2 z}{dt^2}$ seinen Wert setzt, erhält man:

$$\pm N = \frac{m}{\sqrt{p}}\left\{\frac{\left(z+\frac{p}{4}\right)\left[(z-z_0)(2z+p+z_0)+(z-\alpha)(z+\beta)\right]-(z-z_0)(z-\alpha)(z+\beta)-2z\left(z+\frac{p}{4}\right)^2}{\left(z+\frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}. \quad (33)$$

Da N wesentlich positiv ist, so ergiebt sich aus dem durch die Werte von v und z bestimmten Zeichen der rechten Seite, welches Zeichen von N in jedem Augenblicke zu nehmen ist, damit die Gleichung nicht unmöglich werde. Damit ist die Richtung der Normalkraft bestimmt und somit die Richtung des von der Oberfläche ausgeübten Widerstandes. Nach unserer früheren Festsetzung entspricht das positive Zeichen der Richtung nach oben, das negative Zeichen der Richtung nach unten. Für das Paraboloid bildet nun die Normale auf die Tangentialebene eines jeden Punktes, also auf die Normalkraft mit der z Axe einen stumpfen Winkel und zwar, wenn wir die Drehung der positiven z Axe nach der positiven x Axe als positiv festsetzen, einen Winkel im 4^ten^ Quadranten, wenn sie nach der z Axe hin, d. h. nach innen — im 2^ten^ Quadranten, wenn sie von der Axe weg, d. h. nach aufsen gerichtet ist. (Fig. 2.) Die nach innen oder aufsen gerichtete Normalkraft $M_0 N$, resp. $M_0 N'$, läfst sich nun zerlegen in zwei Komponenten, eine senkrecht zur z Axe und eine längs derselben; letztere ist gleich $N \cos\gamma$, also positiv, wenn γ im 4^ten^ Quadranten ($M_0 A$), negativ, wenn γ im 2^ten^ Quadranten liegt ($M_0 A_1$). Daher entspricht das positive Zeichen dem Zuge der Normalkraft nach innen, das negative Zeichen dem Zuge nach aufsen.

Für den Punkt $z = z_0$ ergiebt sich aus (33):

$$\pm N = \frac{m}{\sqrt{p}}\,\frac{(z_0-\alpha)(z_0+\beta)-2z_0\left(z_0+\frac{p}{4}\right)}{\sqrt{z_0+\frac{p}{4}}} = \frac{m}{\sqrt{p}}\,\frac{\frac{v_0^2}{m}+\frac{p}{2}z_0}{\sqrt{z_0+\frac{p}{4}}},$$

da $(z_0-\alpha)(z_0+\beta) = z_0^2 + (p+z_0)z_0 + \frac{v_0^2}{m}$ ist; d. h. für die Anziehung:

$$\pm N = \frac{\mu^2}{\sqrt{p}}\,\frac{\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 - \frac{p}{2}z_0}{\sqrt{z_0+\frac{p}{4}}}. \quad (34)$$

Also ist:

N positiv, wenn $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 > \frac{p}{2}z_0$

$N =$ Null, wenn $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = \frac{p}{2}z_0$

N negativ, wenn $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 < \frac{p}{2}z_0$.

Für $z = \alpha$ wird:

$$\pm N = -\frac{m}{\sqrt{p}} \frac{z_0{}^2 + \left(\alpha + \frac{p}{2}\right) z_0 + \frac{p}{2}(z_0 - \alpha)}{\sqrt{\alpha + \frac{p}{4}}} = -\frac{m}{\sqrt{p}} \frac{z_0 \beta - \frac{p}{2}\alpha}{\sqrt{\alpha + \frac{p}{4}}},$$

da $(z_0 + \alpha + p) = \beta$ ist; d. h. für $m = -\mu^2$:

$$N = \frac{\mu^2}{\sqrt{p}} \frac{z_0 \beta - \frac{p}{2}\alpha}{\sqrt{\alpha + \frac{p}{4}}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (35)$$

woraus folgt, dafs N im Punkte $z = \alpha$ stets positiv ist, da $z_0 \beta > \frac{p}{2} z_0$ ist.

Für $z_0 = \alpha$ ergiebt sich aus (34) oder (35):

$$N = \frac{\mu^2}{\sqrt{p}} 2 z_0 \sqrt{z_0 + \frac{p}{4}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

also N stets positiv. Dieser Wert ergiebt sich auch aus der dritten Bewegungsgleichung (19) für $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$.

In diesem Falle mufs die Resultante $M_0 R$ der Centralkraft $m r_0 = M_0 C$ und der Normalkraft $M_0 N$ senkrecht zur z Axe gerichtet sein. (Fig. 2.) In der That ist, da der Richtungskosinus von N gegen die z Axe $\cos\gamma = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{z_0 + \frac{p}{4}}}$ ist, die Beschleunigung der Normalkraft längs der z Axe $M_0 A = N \cos\gamma = \mu^2 z_0$. Ebenso ist die Komponente der Centralkraft längs der z Axe $M_0 A_1 = m z_0 = -\mu^2 z_0$. Also für $z_0 = \alpha$ werden die längs der z Axe genommenen Komponenten der Attraktions- und Normalkraft einander entgegengesetzt gleich, d. h. es bestätigt sich, dafs die Bewegung nicht aus der z_0 Ebene heraustreten kann. Setzt man beide Werte in die dritte Gleichung (19) ein, so ergiebt sich $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, wie wir schon oben für $z_0 = \alpha$ gefunden haben. — Die Summe der Beschleunigungskomponenten normal zur z Axe $M_0 B$ und $M_0 B_1$ mufs also gleich der Centrifugalkraft sein. Es ist:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu^2 x \frac{2 z_0 + p}{p}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu^2 y \frac{2 z_0 + p}{p},$$

wie sich aus den Bewegungsgleichungen (19) durch Substitution von v und des Wertes von N aus (36) ergiebt. Demnach ist die Resultante:

$$R = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2} = -\mu^2 (2 z_0 + p) \sqrt{\frac{z_0}{p}}.$$

Die Centrifugalkraft ist $= \frac{v_0{}^2}{r_1}$, wo $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = \sqrt{2 z_0{}^2 + p z_0}$, $r_1 = \sqrt{p z_0}$ ist, woraus folgt:

$$\frac{v_0{}^2}{r_1} = \mu^2 (2 z_0 + p) \sqrt{\frac{z_0}{p}}.$$

Also im Grenzfalle $z_0 = \alpha$ ist die Resultante der Central- und Normalkraft senkrecht zur z Axe gerichtet und gleich der Centrifugalkraft.

Gemäfs (34) kann der merkwürdige Fall eintreten, dafs $N = 0$ wird, und zwar im Punkte z_0 für die bestimmte Geschwindigkeit $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = \frac{p}{2} z_0$. Dann wird $\frac{d^2 z}{d t^2} = m z_0 = -\mu^2 z_0$. In der That ergiebt sich dieser Wert aus Gleichung (30) für $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = \frac{p}{2} z_0$.

Im Falle $v_0 = 0$ wird $\alpha = 0$. Dann ist nach Gleichung (31) für den Scheitel:

$$v^2 = \mu^2 z_0 \beta = \mu^2 (z_0 + p) z_0$$

und nach (35):

$$N = \frac{\mu^2 z_0 \beta}{\frac{p}{2}} = \frac{v^2}{\frac{p}{2}},$$

und da $\frac{p}{2}$ der Krümmungsradius im Scheitel des Paraboloids, also $\frac{v^2}{\frac{p}{2}}$ gleich der Centrifugalkraft ist, so ist im Scheitel die Normalkraft gleich der Centrifugalkraft. Die Bewegungsgleichungen nehmen daher die Form an:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0. \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = 0. \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = N.$$

Im Scheitel ist nämlich für $z = 0$ die Centralkraft $= 0$, es wirkt also nur noch die Normalkraft senkrecht zur Tangentialebene des Scheitels, d. h. in der Richtung der z Axe. Diese hat beim Durchgang des Punktes durch den Scheitel den Punkt auf der Fläche zu halten, mufs also gleich der Centrifugalkraft sein.

Im Punkte $z = z_0$ ist für $v_0 = 0$

$$N = -\mu \frac{2\sqrt{p}}{2} \frac{z_0}{\sqrt{z_0 + \frac{p}{4}}}.$$

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dafs N meist positiv ist; negativ kann es nur werden, für $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 < \frac{p}{2} z_0$. Im Punkte α ist es stets positiv. Also giebt es für $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 < \frac{p}{2} z_0$ stets einen Punkt der Bahn zwischen z_0 und α, in welchem $N = 0$ wird, und zwar liegt dieser Punkt um so näher an z_0, je näher $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2$ an $\frac{p}{2} z_0$ liegt, und fällt für $\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = \frac{p}{2} z_0$ mit z_0 zusammen.

Die Gröfse der Normalkraft hängt demnach vor allem von der Geschwindigkeit ab, und zwar wächst sie mit dieser, wie aus (34) ersichtlich ist. Das ist von vornherein klar, denn mit der Geschwindigkeit wächst die Centrifugalkraft, d. h. das Bestreben des Punktes, die Fläche zu verlassen, und damit mufs auch die Kraft, welche den Punkt auf der Fläche hält, d. i. eben die Normalkraft, wachsen. Bei kleinen Geschwindigkeiten, also kleiner Centrifugalkraft, überwiegt die Centralkraft, welche mit einer Komponente den Punkt in die Fläche hineinzuziehen sucht. Daher mufs für kleine Geschwindigkeiten die Normalkraft nach aufsen wirken, d. h.

negativ sein. Im Augenblicke, wo Centralkraft und Centrifugalkraft sich das Gleichgewicht halten, bedarf es keines Zwanges, um den Punkt auf der Fläche zu halten: die Normalkraft ist = Null.

§ 6.

Wenden wir uns nun zur genaueren Betrachtung der unter (28) und (29) gegebenen Ausdrücke für t und ψ.

Die nächste Aufgabe ist, diese elliptischen Integrale auf die Normalform zu bringen. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke einer Substitution II. Ordnung*), welche sehr schnell zum Ziele führt und sehr einfache und übersichtliche Resultate liefert.

Betrachten wir zunächst den Fall $z_0 > \alpha$, dann ist die Reihenfolge der nach ihrer Gröfse geordneten Wurzeln der Gleichung $R = 0$: $a = -\beta$, $b = -\frac{p}{4}$, $c = \alpha$, $d = z_0$, wo $a < b < c < d$. Durch die Substitution:

$$\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 - \alpha} \cdot \frac{(z - \alpha)}{z + \frac{p}{4}} = \sin^2 \varphi,$$

woraus folgt:

$$z = \frac{\alpha\left(z_0 + \frac{p}{4}\right) + \frac{p}{4}(z_0 - \alpha)\sin^2\varphi}{\left(z_0 + \frac{p}{4}\right) - (z_0 - \alpha)\sin^2\varphi}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

erhält man sofort, wenn $\sqrt{R(z)} = \sqrt{\mu^2 (z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}$ gesetzt wird:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{2}{\mu\sqrt{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

wo:

$$k^2 = \frac{\left(\beta - \frac{p}{4}\right)(z_0 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)(\beta + z_0)}{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Bezüglich der Grenzen der Variablen z und φ ist zu bemerken, dafs sich die Intervalle für z von α bis z_0 und für φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ entsprechen, sodafs, wenn z stetig wachsend das Intervall von α bis z_0 durchläuft, φ stetig wachsend von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht. Ferner hat unter der Voraussetzung, dafs $\sqrt{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}$ stets positiv ist, $\sqrt{R(z)}$ und $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ stets gleiches Zeichen.

*) Schellbach: Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. S. 271.

Betrachten wir nun zunächst das erste der obigen Integrale (28):

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{\sqrt{\mu^2 (z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}}.$$

Dasselbe geht durch vorstehende Substitution über in:

$$t = \frac{p}{4} \cdot \frac{2}{\mu \sqrt{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} +$$

$$\frac{2}{\mu \sqrt{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int \frac{A + B \sin^2 \varphi}{1 + \lambda \cdot \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

wo:

$$A = \alpha, \quad B = \frac{p}{4} \cdot \frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}}, \quad \lambda = -\frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}}.$$

Für das zweite Integral folgt dann aus:

$$\frac{A + B \sin^2 \varphi}{1 + \lambda \sin^2 \varphi} = \frac{B}{\lambda} + \frac{A - \frac{B}{\lambda}}{1 + \lambda \sin^2 \varphi} = -\frac{p}{4} + \frac{\alpha + \frac{p}{4}}{1 + \lambda \sin^2 \varphi}$$

$$\int \frac{A + B \sin^2}{1 + \lambda \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{p}{4} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \left(\alpha + \frac{p}{4}\right) \int \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Durch Substitution dieses Integrals in t hebt sich das elliptische Integral I. Gattung auf, und man erhält einfach t ausgedrückt durch ein elliptisches Integral III. Gattung, nämlich, wenn man von $t = 0$ integriert:

$$t = \frac{2\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)}{\mu \sqrt{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Gehen wir nun zur Reduktion von ψ (29) auf die Normalform über. Durch Zerlegung erhält man:

$$\psi = \frac{C_1}{p} \left\{ \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{p}{4} \int \frac{dz}{z\sqrt{R(z)}} \right\}.$$

Aus (37) ergiebt sich:

$$\frac{1}{z} = \frac{\left(z_0 + \frac{p}{4}\right) - (z_0 - \alpha)\sin^2 \varphi}{\alpha\left(z_0 + \frac{p}{4}\right) + \frac{p}{4}(z_0 - \alpha)\sin^2 \varphi} = \frac{A_1 + B_1 \sin^2 \varphi}{1 + l \cdot \sin^2 \varphi},$$

wo:

$$A_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad B_1 = -\frac{z_0 - \alpha}{\alpha\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}, \quad l = \frac{\frac{p}{4} \cdot (z_0 - \alpha)}{\alpha \cdot \left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}.$$

ψ nimmt durch diese Substitution die Form an:

$$\psi = \frac{C_1}{p} \left\{ \frac{2}{\mu \sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \right.$$

$$\left. \frac{p}{4} \cdot \frac{2}{\mu \sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int \frac{A_1 + B_1 \sin^2 \varphi}{1 + l \sin^2 \varphi} \; \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right\}.$$

Für das zweite Integral folgt aus:

$$\frac{A_1 + B_1 \sin^2 \varphi}{1 + l \sin^2 \varphi} = \frac{B_1}{l} + \frac{A_1 - \frac{B_1}{l}}{1 + l \sin^2 \varphi} = -\frac{1}{\frac{p}{4}} + \frac{\alpha + \frac{p}{4}}{\alpha \cdot \frac{p}{4}} \cdot \frac{1}{1 + l \sin^2 \varphi}$$

$$\int \frac{A_1 + B_1 \sin^2 \varphi}{1 + l \sin^2 \varphi} = -\frac{1}{\frac{p}{4}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\alpha + \frac{p}{4}}{\alpha \cdot \frac{p}{4}} \int \frac{d\varphi}{(1 + l \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Durch Substitution in ψ fällt auch hier das elliptische Integral I. Gattung fort, und ψ drückt sich ebenso wie t aus durch ein einfaches elliptisches Integral III. Gattung, und zwar, wenn wir auch hier von $t = 0$ die Integration beginnen:

$$\psi = \frac{C_1}{\alpha p} \frac{2\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)}{\mu \sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + l \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Wir wählen nun den Anfangspunkt der Bewegung für $t = 0$ so, dafs die untere Grenze φ_0 der auf die Normalform reduzierten Integrale Null wird. Es ist aber nach (37) für $\varphi = 0$, $z = \alpha$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $z = z_0$. Wir zählen daher die Zeit t und ebenso ψ nicht von z_0, dem Ausgangspunkt der Bewegung, sondern vom tiefsten Punkte der Bahn $z = \alpha$, sodafs für $z = \alpha$, d. h. $\varphi = 0$, $t = 0$ und $\psi = 0$ ist. Wie oben erwähnt, hat $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ stets dasselbe Zeichen wie $\sqrt{R(z)}$, dieses aber hat das Zeichen $+$ beim Steigen, das Zeichen $-$ beim Fallen. Da wir nun hier den Fall $z_0 > \alpha$ betrachten und vom tiefsten Punkte $z = \alpha$ ausgehen, so ist demnach die Wurzel positiv zu nehmen, und die Formeln für t und ψ nehmen die Form an:

$$t = \frac{2\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)}{\mu \sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\psi = \frac{C_1}{\alpha p} \frac{2\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)}{\mu \sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + l \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

und wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{2\left(\alpha+\frac{p}{4}\right)}{\mu\sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0+\frac{p}{4}\right)}}=M, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

$$t=M\cdot\Pi\,(k,\lambda,\varphi) \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

$$\lambda=-\frac{z_0-\alpha}{\left(z_0+\frac{p}{4}\right)}$$

$$\psi=\frac{C_1}{\alpha p}\,M\,\Pi\,(k,l,\varphi) \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

$$l=\frac{\frac{p}{4}}{\alpha}\cdot\frac{z_0-\alpha}{z_0+\frac{p}{4}}.$$

Wir bezeichnen nun mit T die halbe Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, welche der Punkt braucht, um vom tiefsten Punkte zum höchsten aufzusteigen, ebenso mit Ψ den Wert des Winkels ψ, welcher T entspricht, d. h. den Winkel, welchen eine durch den Punkt und die z Axe gelegte Ebene beschreibt, während der Punkt vom tiefsten zum höchsten Punkte aufsteigt. Es ist dann, da $z=\alpha$, $\varphi=0$ und $z=z_0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ entspricht:

$$T=M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+\lambda\,sin^2\,\varphi)\,\Delta\,\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

$$\Psi=\frac{C_1}{\alpha p}M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+l\,sin^2\,\varphi)\,\Delta\,\varphi}. \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

§ 7.

Für die weitere Behandlung führen wir das elliptische Integral I. Gattung als unabhängige Variable ein und setzen:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\,\varphi}{\Delta\varphi}=u,$$

sodaſs

$$\varphi=am\,u,$$

dann ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet:

$$n\,\pi+\varphi=n\,\pi+am\,u=am\,(u+2n\,K).$$

Also:

$$sin^2\,(\varphi+n\pi)=sin^2\,\varphi=sin^2\,am\,(u+2\,n\,K),$$

d. h. mit Rücksicht auf Gleichung (37): Der Wert von z ist für alle Lagen des beweglichen Punktes, deren Amplituden φ sich um ein Vielfaches von π unterscheiden, derselbe; ändert sich aber $\varphi=am\,u$ um $n\pi$, so ändert sich u um $2nK$.

Die der Amplitude φ und dem Parameter u entsprechende Ebene enthält also auch den Ort für die Lagen aller Punkte, welche der Amplitude $\varphi + n\pi$ und dem Parameter $u + 2nK$ entsprechen.

Von besonderer Wichtigkeit sind für uns die zusammengehörigen Werte von φ und u für die beiden Grenzebenen α und z_0. Es ist aber für $z = \alpha$, $\varphi = 0$, $u = 0$; für $z = z_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $u = K$. Die vorige Gleichung geht daher über in:

$$\text{für } z = \alpha \quad sin^2(0 + n\pi) = sin^2 0 = sin^2 am (2nK)$$

$$\text{für } z = z_0 \quad sin^2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = sin^2 \frac{\pi}{2} = sin^2 am (K + 2nK),$$

d. h. für $\varphi = n\pi$, $u = 2nK$ ist der Punkt in α,

für $\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $u = K + 2nK$ ist der Punkt in z_0,

wo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ zu setzen ist.

Daraus ergiebt sich folgendes Schema:

$z =$	α	z_0	α	z_0
$\varphi =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$u =$	0	K	$2K$	$3K.$

Hieraus folgt: Bei der Oscillation des Punktes von einer Grenzebene zur anderen ändert sich φ um $\frac{\pi}{2}$, u um K.

Es ist ferner:

$$sin^2 am (K - u) = sin^2 am (K + u),$$

d. h. den Amplituden $(K - u)$ und $(K + u)$ entspricht derselbe Wert von z. Da nun K dem höchsten Punkte z_0 entspricht, so folgt daraus, dafs die Bewegung in der Art vor sich geht, dafs z bei der Abwärtsbewegung genau in der umgekehrten Reihenfolge abnimmt, wie es beim Steigen zunimmt. Nach einer Aufwärts- und Abwärtsbewegung treten für z periodisch genau dieselben Werte wieder ein.

Zur weiteren Diskussion führen wir in den für t und ψ gewonnenen Formeln (40) und (41) u als unabhängige Variable ein und gehen dann zu Thetafunctionen über.

Betrachten wir zuerst die Zeit t (40):

$$t = M\,\Pi(\varkappa, \lambda, \varphi),$$

so kommt es zunächst darauf an, das Legendresche Integral $\Pi(\varkappa, \lambda, \varphi)$ durch die Jakobische Transcendente $\Pi(u, c)$ auszudrücken, wo:

$$\lambda = -k^2 \cdot sin^2 am\, c.$$

und c der Jakobische Parameter ist.

Wir werden uns in Folgendem direkt der Formeln bedienen, welche c stets in reeller Form liefern. Zu diesem Zwecke mufs man zunächst entscheiden, zwischen welchen Grenzen λ liegt. Es ist:

$$\lambda = -\frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}}, \quad \frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}} < 1, \text{ also: } \lambda > -1,$$

$$k^2 = \frac{\beta - \frac{p}{4}}{\alpha + \beta} \cdot \frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}}, \quad \frac{\beta - \frac{p}{4}}{\alpha + \beta} < 1, \text{ also: } k^2 < \frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}},$$

folglich $\lambda < -k^2$.

Also:
$$-1 < \lambda < -k^2.$$

Die Überführung des Legendreschen Integrals $\Pi(\varkappa, \lambda, \varphi)$ in die Transcendente $\Pi(u, b)$ erfolgt also durch die Formel:

$$\Pi(\varkappa, \lambda, \varphi) = u + N i\, \Pi(u, K + ib), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

wo:

$$N = \frac{\Delta\, am\, (b, k')}{k'^2 \sin am (b, k') \cos am (b, k')},$$

$$b = \int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{1 + \frac{k^2}{\lambda}}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}}.$$

Durch Substitution der Werte von k, k', λ erhält man:

$$b = \int_0^{\sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{\beta + z_0}}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}},$$

woraus folgt:

$$\sin am\, (b, k') = \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{\beta + z_0}},$$

$$\cos am\, (b, k') = \sqrt{\frac{\beta - \frac{p}{4}}{\beta + z_0}},$$

$$\Delta\, am\, (b, k') = \sqrt{\frac{\beta - \frac{p}{4}}{\alpha + \beta}}$$

und durch Einsetzen dieser Werte in N:

$$N = \frac{\sqrt{(\alpha + \beta)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}}{\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Durch Substitution von (44) geht (40) über in:

$$t = M[u + N i\, \Pi(u, K + ib)].$$

Führen wir nun an Stelle der Funktion $\Pi(u, K + ib)$ Thetafunktionen ein, so geschieht dieses mit Hilfe der Formel:

$$i\, \Pi(u, K + ib) = u\left(Z(b, k') + \frac{\pi b}{2KK'} - \frac{1}{N}\right) + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta[u - (K + ib)]}{\Theta[u + (K + ib)]},$$

wodurch t die Form annimmt:

$$t = MN\left(Z(b,k') + \frac{\pi b}{2KK'}\right)u + MN \cdot \frac{i}{2} \log \frac{\Theta[u-(K+ib)]}{\Theta[u+(K+ib)]}.$$

Mit Benutzung der Werte von M (39) und N (45) ergiebt sich:

$$MN = \frac{2}{\mu}.$$

Also:

$$t = \frac{2}{\mu}\left[Z(b,k') + \frac{\pi b}{2KK'}\right]u + \frac{i}{\mu} \log \frac{\Theta[u-(K+ib)]}{\Theta[u+(K+ib)]}.$$

Es nimmt daher schliefslich, wenn man noch zur Abkürzung setzt:

$$\frac{2}{\mu}\left[Z(b,k') + \frac{\pi b}{2KK'}\right] = P,$$

t die Form an:

$$t = Pu + \frac{i}{\mu} \log \frac{\Theta[u-(K+ib)]}{\Theta[u+(K+ib)]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Behandeln wir nun ebenso ψ (41):

$$\psi = \frac{C_1}{\alpha p} M \Pi(\varkappa, l, \varphi),$$

so ist zunächst wieder $\Pi(\varkappa,l,\varphi)$ durch die Transcendente $\Pi(u,a)$ auszudrücken.

Bestimmen wir zu dem Zwecke die Grenzen von l, so ist:

$$l = \frac{\frac{p}{4}}{\alpha} \cdot \frac{z_0 - \alpha}{z_0 + \frac{p}{4}},$$

also:

$$0 < l < \infty.$$

Das Legendresche Integral $\Pi(\varkappa,l,\varphi)$ wird demnach in die Transcendente $\Pi(u,a)$ übergeführt durch die Substitution:

$$\Pi(\varkappa,l,\varphi) = u + N' i \, \Pi(u, ia), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

wo:

$$N' = \frac{\sin am(a,k') \cos am(a,k')}{\Delta \, am(a,k')},$$

$$a = \int_0^{\sqrt{\frac{l}{l+k^2}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Durch Substitution der Werte von l und k^2 erhält man:

$$a = \int_0^{\sqrt{\frac{\frac{p}{4}(\alpha+\beta)}{\beta\left(\alpha+\frac{p}{4}\right)}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

woraus sofort folgt:

$$sin\,am\,(a,k') = \sqrt{\frac{\frac{p}{4}(\alpha+\beta)}{\beta\left(\alpha+\frac{p}{4}\right)}},$$

$$cos\,am\,(a,k') = \sqrt{\frac{\alpha\left(\beta-\frac{p}{4}\right)}{\beta\left(\alpha+\frac{p}{4}\right)}},$$

$$\varDelta\,am\,(a,k') = \sqrt{\frac{z_0\left(\beta-\frac{p}{4}\right)}{\alpha\left(z_0+\frac{p}{4}\right)}}$$

und durch Substitution dieser Werte in N':

$$N' = \sqrt{\frac{\alpha\cdot\frac{p}{4}}{\beta\cdot z_0}}\cdot\frac{\sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0+\frac{p}{4}\right)}}{\left(\alpha+\frac{p}{4}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Durch Substitution von (47) in (41) erhält man für ψ:

$$\psi = \frac{C_1}{\alpha p} M[u + N' i\,\Pi(u,ia)] = \frac{C_1}{\alpha p} Mu + \frac{C_1}{\alpha p} MN' i\,\Pi(u,ia).$$

Durch Substitution der Werte von M (39) und N' (48) ergiebt sich:

$$\frac{C_1}{\alpha p} MN^1 = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

also:

$$\psi = \frac{C_1}{\alpha p} Mu + i\,\Pi(u,ia).$$

Die Einführung von Thetafunktionen an Stelle von $\Pi(u,ia)$ geschieht durch:

$$i\,\Pi(u,ia) = u\left[Z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'} - tang\,am\,(a,k')\,\varDelta\,am\,(a,k')\right] + \frac{i}{2}\,log\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)},$$

wodurch ψ die Form annimmt:

$$\psi = \left[\frac{C_1}{\alpha p} M - tang\,am\,(a,k')\,\varDelta\,am\,(a,k') + Z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'}\right] u + \frac{i}{2}\,log\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)},$$

und da nach (49) mit Rücksicht auf den Wert von N':

$$\frac{C_1}{\alpha p} M - tang\,am\,(a,k')\,\varDelta\,am\,(a,k') = \frac{C_1}{\alpha p} M - \frac{C_1}{\alpha p} MN'\,tang\,am\,(a,k')\,\varDelta\,am\,(a,k') = \frac{C_1}{\alpha p} M\,cos^2\,am\,(a,k'),$$

$$\psi = \left[\frac{C_1}{\alpha p} M\,cos^2\,am\,(a,k') + Z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'}\right] u + \frac{i}{2}\,log\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}.$$

Setzt man daher noch zur Abkürzung:

$$\frac{C_1}{\alpha p} M\,cos^2\,am\,(a,k') + Z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'} = P'$$

oder mit Einführung der Werte von M und $cos^2\,am\,(a,k')$:

$$2\sqrt{\frac{\alpha z_0}{\beta p}}\frac{\left(\beta-\frac{p}{4}\right)}{\sqrt{(\alpha+\beta)\left(z_0+\frac{p}{4}\right)}}+Z(a,k')+\frac{\pi a}{2KK'}=P',$$

so ergiebt sich schliefslich für ψ die Form:

$$\psi=P'u+\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}. \qquad (50)$$

§ 8.

Für die weitere Behandlung kommen wesentlich die wichtigen Eigenschaften der Thetafunktionen hinsichtlich ihrer Periodicität in betracht. Die wichtigsten, von denen wir Gebrauch machen, sind:

$$\Theta(-u)=\Theta u$$
$$\Theta(u+2K)=\Theta(u-2K)=\Theta u$$
$$\Theta(u+K)=\Theta(u-K).$$

Setzen wir in (46) und (50) $u=K$, so verschwinden die periodischen Glieder, und man erhält, da t in T und ψ in Ψ übergeht:

$$T=PK, \qquad (51)$$
$$\Psi=P'K, \qquad (52)$$

woraus folgende Relation zwischen Ψ und T folgt:

$$\Psi=\frac{P'}{P}T.$$

Hierdurch ergiebt sich die einfache Bedeutung der Koeffizienten von u in Gleichung (46) und (50). Nach (51) und (52) ist nämlich:

$$P=\frac{T}{K}; \qquad P'=\frac{\Psi}{K}.$$

Durch Substitution in (46) und (50) nehmen t und ψ die Form an:

$$t=\frac{T}{K}u+\left(\frac{i}{\mu}\right)\log\frac{\Theta[u-(K+ib)]}{\Theta[u+(K+ib)]}, \qquad (53)$$

$$\psi=\frac{\Psi}{K}u+\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}. \qquad (54)$$

Substituiert man aus der ersten $\frac{u}{K}$ in die zweite, so ergiebt sich folgende Relation zwischen ψ und t:

$$\psi=\frac{\Psi}{T}t-\frac{\Psi}{T}\cdot\left(\frac{i}{\mu}\right)\log\frac{\Theta[u-(K+ib)]}{\Theta[u+(K+ib)]}+\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}.$$

Dieser Ausdruck besteht aus zwei Teilen, einem periodischen und einem solchen, der mit der Zeit proportional wächst, und ist in Verbindung mit (53) und (54) und dem oben über die periodischen Werte von z Gesagten geeignet, eine Vorstellung von der Bewegung des Punktes zu geben.

Das periodische Glied in (53) und (54) verschwindet für $u=0=K=2K=3K\ldots$ und es ergiebt sich demnach folgendes vollständige Schema von entsprechenden Werten:

$z = \alpha$	z_0	α	z_0
$\varphi = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$u = 0$	K	$2K$	$3K$
$t = 0$	T	$2T$	$3T$
$\psi = 0$	Ψ	2Ψ	3Ψ.

Es sei im Folgenden zur Abkürzung:

$$\frac{\Theta\,[u - (K + ib)]}{\Theta\,[u + (K + ib)]} = \Theta, \quad \frac{\Theta\,(u - ia)}{\Theta\,(u + ia)} = \Theta'.$$

Setzt man nun in (53) und (54) $u = u + 2K$, so bleibt das periodische Glied ungeändert, und man erhält, wenn man die dem Parameterwerte $u + 2K$ entsprechende Zeit mit $t_{(u+2K)}$ und das entsprechende ψ mit $\psi_{(u+2K)}$ bezeichnet:

$$t_{(u+2K)} = \frac{T}{K}(u + 2K) + \frac{i}{\mu}\, log\, \Theta,$$

$$\psi_{(u+2K)} = \frac{\Psi}{K}(u + 2K) + \frac{i}{2}\, log\, \Theta'.$$

Durch Subtraktion von t und ψ aus (53) und (54) ergiebt sich:

$$t_{(u+2K)} = 2\,T + t,$$

$$\psi_{(u+2K)} = 2\,\Psi + \psi,$$

oder da $(u + 2K)$ die Zeit $2T + t$ entspricht:

$$\Psi_{(2T+t)} = 2\,\Psi + \psi.$$

Da nun gleichzeitig, wie wir oben gesehen:

$$sin^2\, am\,(u + 2K) = sin^2\, am\,(u),$$

d. h. der Punkt sich zur Zeit $2T + t$ in demselben Parallelkreis befindet, wie zur Zeit t, so folgt daraus, dafs der Punkt nach Verlauf der Zeit $2T + t$ ebensoweit auf dem zweiten Zweige gelangt sein wird, als er nach der Zeit t auf dem ersten Zweige gelangt sein würde. Daraus folgt: dafs die Bahn aus lauter sich wiederholenden kongruenten Zweigen besteht, welche den Zeitintervallen

$$0 \ldots 2T. \quad 2T \ldots 4T. \quad 4T \ldots 6T \ldots$$

und den Winkelintervallen:

$$0 \ldots 2\Psi. \quad 2\Psi \ldots 4\Psi. \quad 4\Psi \ldots 6\Psi$$

entsprechen. Die Bahn wird also im allgemeinen nicht geschlossen sein, d. h. der Punkt wird die Anfangslage nicht wieder erreichen, nämlich wenn ψ und π inkommensurabel sind. — Dagegen wird, wenn ψ und π kommensurabel sind, der Punkt nach einer Anzahl von Oscillationen den Anfangspunkt wieder erreichen, und die Bahn also eine geschlossene sein.

Setzen wir ferner in den Formeln für t und ψ für $u = 2K - u$, so nehmen die periodischen Glieder den entgegengesetzten Wert an, und es ist unter Beibehaltung derselben Bezeichnungsweise wie oben:

$$t_{(2K-u)} = \frac{T}{K}(2K - u) - \left(\frac{i}{\mu}\right) log\, \Theta.$$

$$\psi_{(2K-u)} = \frac{\Psi}{K}(2K - u) - \left(\frac{i}{2}\right) log\, \Theta'.$$

Durch Addition von t und ψ aus (53) und (54) ergiebt sich:

$$t_{(2K-u)} = 2T - t.$$

$$\psi_{(2K-u)} = 2\Psi - \psi.$$

oder da zu $(2K - u)$ die Zeit $(2T - t)$ gehört:

$$\psi_{(2T-t)} = 2\Psi - \psi.$$

Da nun gleichzeitig:

$$\sin am\,(2K - u) = \sin am\,u,$$

d. h. der Amplitude $(2K - u)$ derselbe Parallelkreis entspricht wie der Amplitude u, so folgt daraus, daſs der Punkt zur Zeit $2T - t$ ebenso viel weniger vom Ende des ersten Zweiges zurückgelegt hat, als er zur Zeit t vom Anfange aus zurückgelegt haben würde. Daraus folgt: Jeder der kongruenten Zweige besteht wieder aus zwei kongruenten Halbzweigen, die jedoch eine entgegengesetze Lage zu einander haben.

Die Kongruenz der Halbzweige läſst sich noch auf verschiedene andere Arten beweisen. Setzt man nämlich statt u in (53) und (54) $(K - u)$, so wird:

$$\underset{(K-u)}{\Theta} = \frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)} \qquad \underset{(K-u)}{\Theta'} = \frac{\Theta[K+(u+ia)]}{\Theta[K+(u-ia)]}.$$

und ebenso für $(K + u)$:

$$\underset{(K+u)}{\Theta} = \frac{\Theta(u-ib)}{\Theta(u+ib)} \qquad \underset{(K+u)}{\Theta'} = \frac{\Theta[K+(u-ia)]}{\Theta[K+(u+ia)]}.$$

Demnach erhält man, da:

$$\log\frac{\Theta(u-ib)}{\Theta(u+ib)} = -\log\frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}:$$

$$t_{(K-u)} = \frac{T}{K}(K-u) + \left(\frac{i}{\mu}\right)\log\frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}$$

$$t_{(K+u)} = \frac{T}{K}(K+u) - \left(\frac{i}{\mu}\right)\log\frac{\Theta(u+ib)}{\Theta(u-ib)}.$$

Ebenso:

$$\psi_{(K-u)} = \frac{\Psi}{K}(K-u) + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta[K+(u+ia)]}{\Theta[K+(u-ia)]}.$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$t_{(K-u)} + t_{(K+u)} = 2T.$$

$$\Psi_{(K-u)} + \Psi_{(K+u)} = 2\Psi.$$

oder:

$$t_{(K+u)} = 2T - t_{(K-u)}.$$

$$\Psi_{(K+u)} = 2\Psi - \Psi_{(K-u)}.$$

Da nun $\sin am\,(K - u) = \sin am\,(K + u)$, d. h. $(K - u)$ und $(K + u)$ demselben Parallelkreis entsprechen, so ergiebt sich hieraus wie oben die Kongruenz der Halbzweige.

Es läſst sich überhaupt allgemein zeigen, daſs die zwischen zwei beliebigen Parallelebenen gelegenen Bögen gleich sind:

Betrachtet man zwei beliebige durch die Parameterwerte u und u_1 bestimmte Parallelebenen, so ist:

$$t_u = \frac{T}{K}u + \left(\frac{i}{\mu}\right)\log\underset{u}{\Theta}.$$

$$t_{u_1} = \frac{T}{K}u_1 + \left(\frac{i}{\mu}\right)\log\underset{u_1}{\Theta}.$$

Also durch Subtraktion:

$$t_{u_1} - t_u = \frac{T}{K}(u_1 - u) + \left(\frac{i}{u}\right)(\log \underset{u_1}{\Theta} - \log \underset{u}{\Theta}).$$

Bei der rückläufigen Bewegung passiert der Punkt diese Ebenen für die Parameterwerte $(2K - u)$ und $(2K - u_1)$, also gelten die Formeln:

$$t_{(2K-u)} = \frac{T}{K}(2K - u) - \frac{i}{\mu} \log \underset{u}{\Theta}.$$

$$t_{(2K-u)} = \frac{T}{K}(2K - u_1) - \frac{i}{\mu} \log \underset{u_1}{\Theta}.$$

Also durch Subtraktion:

$$t_{(2K-u)} - t_{(2K-u_1)} = \frac{T}{K}(u_1 - u) + \frac{i}{\mu}(\log \underset{u_1}{\Theta} - \log \underset{u}{\Theta}).$$

Daraus folgt:

$$t_{(2K-u)} - t_{(2K-u_1)} = t_{u_1} - t_u.$$

Ebenso ergiebt sich für ψ:

$$\psi_{(2K-u)} - \psi_{(2K-u_1)} = \psi_{u_1} - \psi_u.$$

Hieraus folgt, dafs zwei beliebige Parallelebenen auf beiden Halbzweigen gleiche Bögen zwischen sich abschneiden, dafs also die Halbzweige kongruent sind.

Das Resultat der bisherigen Betrachtungen ist, dafs der Punkt zwischen den Parallelkreisen z_0 und α oscilliert, und zwar, wie die Diskussion des Winkels ψ zeigte, sodafs die Stellung der höchsten und tiefsten Lagen sich im Laufe der Bewegung auf den beiden Grenzkreisen verschiebt.

Fig. 3 stellt die Projektion eines Teiles der Bahn auf die horizontale xy Ebene dar. S ist der Scheitel des Paraboloides, und die beiden Kreise sind die Projektionen der beiden Grenzkreise z_0 und α, welche der Punkt bei seinen Oscillationen berührt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, der Punkt beginne seine Bewegung nicht wie in den bisherigen Betrachtungen im tiefsten Punkte der Bahn, sondern im Anfangspunkte der Bewegung M_0. Es kann dieses einfach geschehen, da, wie wir gesehen haben, die Bahn aus lauter kongruenten, von den beiden Kreisen begrenzten Teilen besteht.

Der Punkt beginnt seine Bewegung in 0, bewegt sich abwärts bis zum Punkte 1, steigt sodann bis zum Punkte 2 auf, fällt wieder bis 3 etc.

Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 .... sind also die höchsten, resp. tiefsten Punkte der Bahn und liegen auf den Grenzkreisen, sodafs:

$$S0 = S2 = S4 = \;\ldots\; = \sqrt{pz_0}.$$

$$S1 = S3 = S5 = \;\ldots\; = \sqrt{p\alpha}.$$

Sie entsprechen den Zeiten:

$$0,\ T,\ 2T,\ 3T,\ = \ldots.$$

und den Winkeln:

$$\psi = 0,\ = \Psi,\ = 2\,\Psi,\ = 3\,\Psi,\ = \ldots,$$

sodafs:

$$0\,S1 = 1\,S2 = 2\,S3 = 3\,S4 = \ldots = \Psi.$$

Die Gröfse dieses Winkels Ψ ist für die Kenntnis der Bewegung von der gröfsten Wichtigkeit. Es bleibt nämlich zur vollständigen Bestimmung der Bewegung noch die wichtige

Frage zu erledigen, ob der höchste Punkt der Bahn im Sinne der Bewegung fortschreitet oder entgegengesetzt. Diese Frage läuft daraus hinaus, ob der Winkel Ψ, um welchen die Vertikalebene des beweglichen Punktes sich dreht, während dieser von einer höchsten zur nächsten tiefsten Lage fortschreitet, gröfser oder kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

Es wird im Folgenden gezeigt werden, dafs er stets gröfser als $\frac{\pi}{2}$ ist. Damit ist dann nachgewiesen, dafs der höchste Punkt der Bahn auf dem Parallelkreis z_0 in der Richtung der Bewegung vorwärts schreitet, wie es die Fig. 3 zeigt.

§ 9.

Wir wählen zu diesem Nachweise die Methode der Riemannschen Flächen, welche hier sehr schnell zum Ziele führt. Gehen wir aus von Gleichung (29) und integrieren von α bis z_0

$$\psi = \frac{C_1}{\mu p} \int_{\alpha}^{z_0} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) d\, z}{z \sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}}.$$

Es sei zunächst Fig. 4 die Riemannsche Fläche, welche der Funktion: $\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}$ angehört, d. h. dieselbe zu einer eindeutigen Funktion des Ortes macht. Dementsprechend seien α, z_0, $-\frac{p}{4}$, $-\beta$ die Verzweigungspunkte und $\overline{\alpha z_0}$ und $\overline{-\frac{p}{4} - \beta}$ die Verzweigungsschnitte.

Untersuchen wir zunächst die stetige Ausbreitung der Funktion auf dieser Fläche.

Wir setzen oberhalb $\overline{\alpha z_0}$ auf dem oberen Blatte die negativen Wurzelwerte fest, dann liegen unterhalb die positiven Werte. Es fragt sich nun, was für Wurzelwerte auf beiden Seiten von $\overline{-\beta - \frac{p}{4}}$ liegen.

Es ist bekanntlich, wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 die Entfernungen eines beliebigen Punktes z von den Verzweigungspunkten α, z_0, $-\frac{p}{4}$, $-\beta$ bedeuten und ebenso φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 die entsprechenden Winkel gegen die Axe, wo die Drehung von rechts nach links auf der oberen Seite als positiv vorausgesetzt wird:

$$z - z_0 = \varrho_1 \, e^{\varphi_1 i};$$

also, da $e^{\pi i} = -1$ ist,

$$z_0 - z = \varrho_1 \, e^{\varphi_1 i + \pi i}$$
$$z - \alpha = \varrho_2 \, e^{\varphi_2 i}$$
$$z + \frac{p}{4} = \varrho_3 \, e^{\varphi_3 i}$$
$$z + \beta = \varrho_4 \, e^{\varphi_4 i}.$$

Daher:

$$\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)} = (\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{e^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)i + \pi i}} = (\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_3}{2} + \frac{\varphi_4}{2}\right)i + \frac{\pi}{2}i}.$$

Nun läſst sich das Zeichen der Wurzel für jede Lage von z bestimmen.

Liegt z auf dem oberen Rande des Verzweigungsschnittes $\overline{\alpha z_0}$, so ist: $\varphi_1 = \pi$; $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

Also:

$$\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)} = (\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i} = -(\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4)^{\frac{1}{2}}.$$

Es liegen also auf der oberen Seite von $\overline{\alpha z_0}$ die negativen Wurzelwerte, also auf der unteren die positiven Werte.

Liegt z auf dem oberen Rande des Verzweigungsschnittes $\overline{-\beta - \frac{p}{4}}$, so ist: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi$; $\varphi_4 = 0$.

Also:

$$\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)} = (\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4)^{\frac{1}{2}}\, e^{2\pi i} = +(\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4)^{\frac{1}{2}},$$

da $e^{2\pi i} = +1$ ist.

Es liegen also oberhalb $\overline{-\beta - \frac{p}{4}}$ die positiven und unterhalb die negativen Wurzelwerte.

Betrachten wir nun das Integral:

$$\int_{\alpha}^{z_0} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}}\,,$$

welches im allgemeinen unendlich vieldeutig ist, so kommt es zunächst darauf an, dasselbe für die Riemannsche Fläche zu einer eindeutigen Funktion des Ortes zu machen.

Suchen wir also zunächst die Unstetigkeitspunkte. Die Verzweigungspunkte α, z_0, $-\frac{p}{4}$, $-\beta$ sind nicht Unstetigkeitspunkte für das Integral, weil $(z - \alpha)\, f(z)$ etc., wo $f(z)$ die Funktion unter dem Integral bedeutet, für $z = \alpha$ etc. = Null wird, welches die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daſs das Integral in dem Punkte $z = \alpha$ etc. endlich bleibt. Dagegen ist der Punkt $z = 0$ ein Unstetigkeitspunkt, da für $z = 0$ $z f(z)$ endlich, also das Integral unendlich wird. Dieser ist also sowohl auf dem oberen als unteren Blatte der Riemannschen Fläche auszuschlieſsen. Um nun die Riemannsche Fläche in eine einfache zusammenhängende zu verwandeln, legen wir das bekannte System der Querschnitte A und B, wie es die Fig. 5 zeigt, und verbinden es noch mit der Begrenzung des Unstetigkeitspunktes $z = 0$ durch Querschnitte, so ist jetzt das Integral auf dieser Fläche in eine eindeutige Funktion des Ortes verwandelt. Es hat dann das Integral längs einer beliebigen geschlossenen Linie genommen den Wert Null.

Nehmen wir nun das Integral längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Verzweigungspunkte umgebend ganz im oberen Blatte verläuft und auch den Nullpunkt einmal umkreist, und denken wir uns diese Linie den Verzweigungs- und Querschnitten von beiden Seiten unendlich nahe. Durchläuft man nun von α aus im Sinne der durch die Pfeile angegebenen Richtung die Linie:

$$\alpha - z_0 - C - D - (\overline{-\beta - p/4}) - D_1 - E - F - \odot - F_1 - E_1 - C_1 - \alpha,$$

so ist die Summe der längs dieser Linie erstreckten Integrale Null:

$$\int_\alpha^{z_0}(+) + \int_{z_0}^{C}(-) + \int_C^D + \int_D^{D_1}(\overline{-\beta - p/4}) + \int_{D_1}^{E} + \int_E^F + \int_F^{F_1}\odot + \int_{F_1}^{E_1} + \int_{E_1}^{C_1} + \int_{C_1}^{\alpha}(-) = 0.$$

In dieser Summe heben sich die zu beiden Seiten des Querschnittes in entgegengesetzter Richtung erstreckten Integrale auf, und es bleibt also die Summe der beiden um die Verzweigungsschnitte $\overline{\alpha z_0}$ und $\overline{-\beta - \frac{p}{4}}$ und des um den Punkt 0 herum erstreckten Integrals = Null. Hierbei ist zu bemerken, dafs das um den Querschnitt A erstreckte Integral durch Zusammenziehen des Querschnittes dem Verzweigungsschnitte $\overline{-\beta - \frac{p}{4}}$ unendlich nahe gebracht werden kann.

Nun ist das um αz_0 erstreckte Integral:

$$\int(\overline{\alpha z_0}) = \int_\alpha^{z_0}(+) + \int_{z_0}^{C}(-) + \int_{C_1}^{\alpha}(-) = \int_\alpha^{z_0}(+) + \int_{z_0}^{\alpha}(-),$$

und da $\int_{z_0}^{\alpha}(-) = +\int_\alpha^{z_0}(+)$ ist:

$$\int(\overline{\alpha z_0}) = 2\int_\alpha^{z_0}(+).$$

Ebenso ist das um $\overline{-\beta - \frac{p}{4}}$ erstreckte Integral:

$$\int_D^{D_1}(\overline{-\beta - p/4}) = \int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(-) + \int_{-\frac{p}{4}}^{-\beta}(+),$$

und da $\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(-) = -\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+)$ und $\int_{-\frac{p}{4}}^{-\beta}(+) = -\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+)$,

$$\int_D^{D_1}(\overline{-\beta - p/4}) = -2\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+).$$

Man hat folglich, wenn man das Integral um den Nullpunkt mit $\int\limits_{(0)}$ bezeichnet:

$$2\int_{\alpha}^{z_0}(+) - 2\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+) + \int\limits_{(0)} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Es bleibt nun noch der Wert des Integrals um den Nullpunkt zu bestimmen. Es ist bekanntlich für den Punkt 0, wenn $f(z)$ die Funktion unter dem Integral bezeichnet:

$$\int\limits_{(0)} f(z)\, dz = 2\pi i Q,$$

wo:

$$Q = lim\, [z f(z)] \text{ für } z = 0.$$

Also:

$$Q = \left[\frac{z\left(z+\frac{p}{4}\right)}{z\sqrt{(z_0-z)(z-\alpha)\left(z+\frac{p}{4}\right)(z+\beta)}}\right]_{z=0} = \frac{\frac{p}{4}}{\sqrt{-\alpha\beta z_0 \frac{p}{4}}}$$

Es fragt sich nun, welches Zeichen die Wurzel im Punkte $z=0$ hat. Es ist für $z=0$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi.; \quad \varphi_3 = \varphi_4 = 0.$$

Also:

$$\sqrt{(z_0-z)(z-\alpha)\left(z+\frac{p}{4}\right)(z+\beta)} = (\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i + \frac{\pi}{2} i} = -(\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2} i} =$$

$$-(\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{e^{\pi i}} = -(\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4)^{\frac{1}{2}} i.$$

Demnach:

$$Q = -\frac{\frac{p}{4}}{i\sqrt{\alpha\beta z_0 \frac{p}{4}}}$$

und

$$\int\limits_{(0)} = 2\pi i Q = -\pi \cdot \frac{p}{\sqrt{\alpha\beta z_0 p}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Wenn man nun Gleichung (55) mit $\frac{C_1}{\mu p}$ multipliziert und gemäfs (29) setzt:

$$\frac{C_1}{\mu p}\int_{\alpha}^{z_0}(+) = \Psi,$$

so ergiebt sich:

$$\Psi = -\frac{C_1}{2\mu p}\int\limits_{(0)} + \frac{C_1}{\mu p}\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Setzt man nun aus (56) für $\int\limits_{(0)}$ seinen Wert und für $C_1 = v_0\sqrt{p z_0}$, so ergiebt sich für das erste Integral:

$$-\frac{C_1}{2\mu p}\int\limits_{(0)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_0}{\mu} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Da nun α und β die Wurzeln der Gleichung:

$$z^2 + (z_0 + p)\,z - \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 = 0$$

sind, und zwar β mit umgekehrtem Zeichen, so ist $\alpha\beta = \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2$, also:

$$-\frac{C_1}{2\mu p}\int\limits_{(0)} = \frac{\pi}{2},$$

folglich geht Gleichung (57) über in:

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{v_0}{\mu}\right)\sqrt{\frac{z_0}{p}}\cdot\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}} \frac{\left(z+\frac{p}{4}\right)dz}{z\sqrt{(z_0 - z)(z-\alpha)\left(z+\frac{p}{4}\right)(z+\beta)}} \quad . \quad . \quad (58)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist, da $-\beta$ stets kleiner als $-\frac{p}{4}$, stets eine positive Gröfse, folglich Ψ stets gröfser als $\frac{\pi}{2}$, und zwar ist dieses Integral um so gröfser, je kleiner $-\beta$ ist, d. h. nach obigem je gröfser $\frac{v_0}{\mu}$ ist, und zwar um so mehr, da auch aufserdem $\frac{v_0}{\mu}$ als Faktor auftritt. Daraus folgt: dafs der bewegliche Punkt bei jeder Oscillation einen Ausschlag nach der Bewegungsrichtung hin macht und dafs dieser Ausschlag um so gröfser ausfällt, je gröfser $\frac{v_0}{\mu}$ ist.

Eine ganz gleiche Behandlung gestattet die Zeit T, welche nach Gleichung (28), wenn wir von α bis z_0 integrieren, die Form hat:

$$T = \frac{1}{\mu}\int_{\alpha}^{z_0} \frac{\left(z+\frac{p}{4}\right)dz}{\sqrt{(z_0 - z)(z-\alpha)\left(z+\frac{p}{4}\right)(z+\beta)}}.$$

Man erhält ein analoges, interessantes Resultat, wie für Ψ. Es gelten vollständig dieselben Betrachtungen wie oben bis auf den Unstetigkeitspunkt, welcher hier der Punkt $z = \infty$ ist; denn es ist $z f(z)$ für $z = \infty$ eine endliche Gröfse, wie man sofort sieht, also das Integral unendlich.

Schliefst man diesen Punkt ebenso auf dem oberen und unteren Blatte aus und verbindet ihn mit dem Querschnittsystem, so ist das Integral längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Verzweigungspunkte umgiebt und den Punkt $z = \infty$ einmal umkreist, = Null. (Fig. 6.)

Nimmt man nun das Integral längs dieser Linie in demselben Sinne wie oben, so heben sich die zu beiden Seiten des Querschnittes entgegengesetzt erstreckten Integrale auf, und es bleibt die Summe der um die Verzweigungsschnitte und um den Punkt $z = \infty$ erstreckten Integrale = Null, d. h. wie oben:

$$\int\left(\overline{\alpha\, z_0}\right) + \int\left(\overline{-\beta - p/4}\right) + \int\limits_{(\infty)} = 0,$$

woraus, wie oben, folgt:

$$2\int_{\alpha}^{z_0}(+) - 2\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+) + \int_{(\infty)} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

Es ist nun das $\int_{(\infty)}$ zu bestimmen. Man hat, wenn man $z = \frac{1}{x}$ setzt:

$$z\,f(z) = \frac{\left(\frac{p}{4}\,x + 1\right)}{\sqrt{(z_0\,x - 1)(1 - \alpha\,x)\left(1 + \frac{p}{4}\,x\right)(1 + \beta\,x)}},$$

woraus für $z = \infty$, d. h. $x = 0$, folgt:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{-1}}.$$

Das Zeichen der Wurzel im Punkte $z = \infty$ bestimmt sich aus $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$, woraus folgt:

$$\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)} = \left(\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\,\varrho_4\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i + \frac{\pi}{2} i} = -\left(\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\,\varrho_4\right)^{\frac{1}{2}} i.$$

Demnach:

$$Q = \frac{1}{-i}.$$

Also:

$$\int_{(\infty)} = 2\,\pi\,i\,Q = -2\,\pi.$$

Multipliziert man nun Gleichung (59) mit $\frac{1}{\mu}$ und setzt für:

$$\frac{1}{\mu}\int_{\alpha}^{z_0}(+) = T,$$

so erhält man:

$$T = -\frac{1}{\mu}\int_{(\infty)} + \frac{1}{\mu}\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}}(+)$$

und wenn man für $\int_{(\infty)}$ seinen Wert $= -2\,\pi$ setzt, so ist:

$$-\frac{1}{\mu}\int_{(\infty)} = \frac{\pi}{\mu}$$

und demnach:

$$T = \frac{\pi}{\mu} + \frac{1}{\mu}\int_{-\beta}^{-\frac{p}{4}} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) d\,z}{\sqrt{(z_0 - z)(z - \alpha)\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

woraus folgt, daſs je kleiner $(-\beta)$ d. h. je gröſser $\frac{v_0}{\mu}$ ist, desto gröſser die Zeit T sein wird.

Dieses entspricht der oben für Ψ (58) gefundenen Relation, denn mit $\frac{v_0}{\mu}$ wächst Ψ und damit die Länge der Zweige und daher auch die Länge der Zeit.

Es sei noch bemerkt, daſs wir ebenso von den transformierten Formen für T und Ψ in Gleichung (42) und (43) hätten ausgehen können.

§ 10.

Betrachten wir nun den speciellen Fall $v_0 = 0$. In diesem Falle ist $\alpha = 0$. Der Punkt erreicht also den Scheitel. Die den Punkt angreifenden Kräfte, die Centralkraft und Normalkraft, fallen beide in die durch die z Axe und den Punkt M_0 gelegte Ebene. Diese Ebene ändert, wie man aus Gleichung (29) sieht, ihre Lage nicht; denn da $C_1 = v_0 \sqrt{p z_0}$ ist, so wird im Falle $v_0 = 0$ auch $\psi = 0$, d. h. diese Ebene wird während der ganzen Bewegung ihre Anfangslage beibehalten. Die Bewegung kann also aus dieser Ebene nicht heraustreten, sondern muſs stets auf der hierdurch bestimmten Parabel erfolgen.

Die Bewegung wird, wie wir oben gesehen, den Punkt z_0 nicht überschreiten können, da für $z_0 \cdot \frac{dz}{dt} = 0$ und $\frac{d^2 z}{dt^2} < 0$ ist. Es wird in diesem speciellen Falle natürlich wie im allgemeinen eine Oscillationsbewegung stattfinden müssen und zwar, da sich dieselbe nur auf der Parabel zwischen den Punkten z_0 erstrecken kann, muſs es eine Pendelbewegung sein. Der Punkt beginnt die Bewegung in M_0 mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0$ bewegt sich mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit abwärts, passiert, wie wir gesehen, mit der Geschwindigkeit $v^2 = \mu^2 z_0 (z_0 + p) = \mu^2 z_0 \beta$ den Scheitel, steigt sodann mit gleichförmig verzögerter Geschwindigkeit auf bis zum Punkte z_0 und beginnt sodann dieselbe Bewegung von neuem, d. h. er pendelt auf der Parabel unaufhörlich.

Es kommt nun darauf an, diesen speciellen Fall aus dem allgemeinen abzuleiten und den Übergang der allgemeinen Bewegung in die Pendelbewegung darzuthun.

Wir haben oben gesehen, daſs der Ausschlag, den der bewegliche Punkt nach jeder Oscillation in der Bewegungsrichtung macht, um so kleiner ist, je kleiner $\frac{v_0}{\mu}$ ist. Für den Fall $v_0 = 0$ nun macht der Punkt gar keinen Ausschlag mehr, sondern kommt in dem Ausgangspunkt z_0 wieder an. Dann ist aber auch der Parallelkreis α zu einem unendlich kleinen Kreis im Scheitel geworden. In diesem Grenzfalle also wäre die Bahn als eine geschlossene aufzufassen, deren beide Zweige den unendlich kleinen Kreis beiderseits berühren, wie es die Fig. 7 in der Projektion in der xy Ebene zeigt.

Als Grenzfall des allgemeinen Problems ist demnach die Parabel anzusehen als bestehend aus zwei zusammenfallenden durch den Scheitel verlaufenden Parabeln, auf deren einer der Punkt hin, auf deren anderer der Punkt zurückgeht.

Bei dieser Anschauung ist es nun leicht, die Pendelbewegung aus den allgemeinen Formeln abzuleiten, indem man einfach 0 an die Stelle von α treten läſst. Dann ist das Schema:

$$\begin{array}{llllll} z = & 0 & z_0 & 0 & z_0 & 0. \\ \varphi = & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & 3\frac{\pi}{2} & 2\pi. \\ \mu = & 0 & K & 2K & 3K & 4K. \end{array}$$

Die Zeit, die der Punkt braucht, um von 0 bis z_0 aufzusteigen, ist nach (51)

$$T = PK.$$

Der Punkt befindet sich also zur Zeit $t = 0$ in $z = 0$, zur Zeit T in z_0, zur Zeit $2\,T$ in $z = 0$. Es ist demnach $4\,T$ die ganze Oscillationsdauer der Pendelbewegung.

Es gilt, wie oben, die Relation:

$$t_{(2K+u)} = 2\,T + t.$$

Diese Zeit entspricht der Bewegung des Punktes von 0 bis z_0, dann zurück bis 0 und weiter auf den anderen Zweig der Parabel. Da nun gleichzeitig:

$$\sin^2 am\,(2\,K + u) = \sin^2 am\,u,$$

d. h. der Punkt sich in demselben Parallelkreis befindet, so folgt hieraus, dafs der Punkt nach der Zeit $2\,T + t$ ebensoweit auf der rechten Halbparabel aufgestiegen ist als nach t auf der linken, d. h. dafs die Bahn aus zwei kongruenten Zweigen besteht und die Bewegung eine Pendelbewegung ist. (Fig. 1.)

Die Kongruenz der Zweige ist von vornherein selbstverständlich, da die Bahn eine feste Parabel ist.

§ 11.

Betrachten wir noch den anderen Grenzfall

$$\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2\,z_0{}^2 + p z_0}, \text{ d. h. } \alpha = z_0.$$

Es ergab sich für denselben eine gleichförmige Bewegung im Parallelkreis z_0 mit der Geschwindigkeit v_0.

Auch diese Bewegung ist ein specieller Fall der allgemeinen, sie stellt den Übergangsfall der absteigenden und aufsteigenden Bewegung des Punktes dar.

Da der Punkt stets zwischen den Parallelkreisen α und z_0 oscillieren mufs, so wird auch dieser specielle Fall der Kreisbewegung ein Grenzfall der Oscillationsbewegung sein. Die Kreisbewegung ist aufzufassen als eine Oscillation des Punktes zwischen den unendlich nahe zu denkenden Parallelkreisen α und z_0.

Es werden also auch hier die Berührungspunkte der Bahn und Grenzkreise auftreten und demnach die Gröfsen T und Ψ ihre ganz bestimmte Bedeutung haben, nämlich die Grenzwerte darstellen, welche der Bewegung des Punktes von einer Grenzebene zur anderen entsprechen. Es wird demnach Ψ der Grenzwinkel sein, um welchen sich die durch die z Axe und den Punkt α gelegte Ebene dreht während der Bewegung des Punktes vom Parallelkreis α bis zum Parallelkreis z_0, für den Fall, dafs beide zusammenfallen.

Dieser Winkel entspricht also einem Bogen des Parallelkreises z_0. T ist dann die Grenzzeit, welche dem Grenzwinkel Ψ entspricht, d. h. die Zeit, welche der Punkt braucht, um den Ψ zugehörigen Bogen zu durchlaufen.

Die Bestimmung dieser Grenzwerte ergiebt sich auf verschiedene Weise.

Zunächst aus den Formeln (42) und (43). Es ist nämlich für $z_0 = \alpha$ in dem für T gegebenen Ausdruck (42) $\lambda = 0$ und $k = 0$. Daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi)\,\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Also:

$$T = M \frac{\pi}{2},$$

und nach Einsetzung des Wertes von M (39):

$$T = \left(\frac{\pi}{\mu}\right) \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}} = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{\frac{\alpha + \frac{p}{4}}{\alpha + \beta}} \quad \text{. . . . . (61)}$$

Ebenso einfach bestimmt sich der Grenzwinkel Ψ aus Gleichung (43). Es ist für $z_0 = \alpha$, $l = 0$ und $k = 0$, demnach:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\varphi}{(1 + l\,sin^2\,\varphi)\sqrt{1 - k^2\,sin^2\,\varphi}} = \frac{\pi}{2}$$

Also:

$$\Psi = \frac{C_1}{\alpha\,p}\,M \cdot \frac{\pi}{2}$$

woraus sich durch Einsetzen der Werte von C_1 und M ergiebt:

$$\Psi = \left(\frac{v_0}{\mu}\right) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{p\,z_0}} \sqrt{\frac{\alpha + \frac{p}{4}}{\alpha + \beta}} = \left(\frac{v_0}{\mu}\right) \frac{\pi}{\sqrt{p\,z_0}} \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}$$

oder wenn man für v_0 seinen Wert $= \sqrt{2\,z_0{}^2 + p\,z_0}$ setzt und für $\beta = 2\,z_0 + p$.

$$\Psi = \pi \frac{\sqrt{2\,z_0 + p} \cdot \sqrt{z_0 + \frac{p}{4}}}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{3\,z_0 + p}} \quad \text{. . . . . (62)}$$

Aus (61) und (62) ergiebt sich folgende Relation zwischen Ψ und T:

$$\Psi = \frac{v_0}{\sqrt{p\,z_0}}\,T = \frac{C_1}{\alpha\,p}\,T.$$

Der Winkel Ψ läſst sich auch auf andere Weise mit Hilfe der in diesem Falle stattfindenden gleichförmigen Bewegung ermitteln, woraus wir oben die Umlaufszeit des Punktes im Parallelkreis z_0 Gleichung (32) gefunden haben.

Ψ ist nun der Centriwinkel und T die Zeit, welche einem Bogen dieses mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufenen Kreises entsprechen. Es muſs sich demnach die Grenzzeit T zur Umlaufszeit T^1 (32) verhalten wie der Grenzwinkel Ψ zu $2\,\pi$. d. h.

$$T : T^1 = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{\frac{\alpha + \frac{p}{4}}{\alpha + \beta}} : \frac{2\,\pi\sqrt{p\,z_0}}{v_0} = \Psi : 2\,\pi$$

woraus sich wie oben ergiebt:

$$\Psi = \frac{v_0}{\mu} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{p\,z_0}} \sqrt{\frac{\alpha + \frac{p}{4}}{\alpha + \beta}}.$$

Auch mittels der folgenden Methode lassen sich die Grenzwerte ableiten und zwar direct

aus den ursprünglichen Ausdrücken für t und ψ, wie sie in Gleichung (28) und (29) gegeben sind. Betrachten wir zuerst Gleichung (28) so ist für $z_0 = \alpha$:

$$T = \frac{1}{\mu i} \int \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{(z - z_0) \sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}}.$$

Dieses Integral ist von α bis z_0 zu nehmen und, da α mit z_0 zusammenfällt, so stellt sich dasselbe einfach als das halbe Integral um den Punkt z_0 herum dar.

Es ist nun:

$$\int_{(z_0)} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{(z - z_0) \sqrt{\left(z + \frac{\beta}{4}\right)(z + \beta)}} = 2 \pi i Q.$$

wo Q der Grenzwert $(z - z_0)\, f(z)$ für $z = z_0$ ist, wenn $f(z)$ die Function unter dem Integral bedeutet.

Demnach:

$$Q = \frac{(z - z_0)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}{(z - z_0) \sqrt{\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)(z_0 + \beta)}} = \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}.$$

Also:

$$\int_{(z_0)} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{(z - z_0) \sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} = 2 \pi i \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}.$$

und

$$\int \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{(z - z_0) \sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} = \pi i \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}.$$

folglich:

$$T = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich der Grenzwert Ψ aus Gleichung (29), welche für $z_0 = \alpha$ die Form annimmt:

$$\Psi = \frac{v_0 \sqrt{p z_0}}{\mu p i} \int \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{z (z - z_0) \sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}}.$$

Auch hier ist das Integral gleich dem halben Werte des Integrals um den Punkt z_0 herum. Es ist nun:

$$\int_{(z_0)} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) dz}{z (z - z_0) \sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} = 2 \pi i Q.$$

wo:

$$Q = \left[\frac{(z - z_0)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}{z_0 (z - z_0)\sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z_0 + \beta)}}\right]_{z = z_0} = \frac{1}{z_0}\sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}.$$

Also:

$$\int\limits_{(z_0)} \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) d z}{z (z - z_0)\sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} = \frac{2 \pi i}{z_0}\sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}$$

und:

$$\int \frac{\left(z + \frac{p}{4}\right) d z}{z (z - z_0)\sqrt{\left(z + \frac{p}{4}\right)(z + \beta)}} = \frac{\pi i}{z_0}\sqrt{\frac{z + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}},$$

folglich:

$$\Psi = \frac{v_0}{\mu} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{p z_0}}\sqrt{\frac{z_0 + \frac{p}{4}}{z_0 + \beta}}.$$

Was die Gröfse des Winkels Ψ anlangt, so ist derselbe nach dem oben gesagten als ein Maximum aufzufassen, da der Ausschlag in der Bewegungsrichtung mit $\frac{v_0}{\mu}$ wächst und dem Falle $\alpha = z_0$ die für unsere Untersuchung gröfste Geschwindigkeit

$$\frac{v_0}{\mu} = \sqrt{2 z_0^2 + p z_0} = \sqrt{(2 z_0 + p) z_0} \text{ entspricht.}$$

Nach Gleichung (62) kann der Fall eintreten, dafs $\Psi = \pi$ wird. Dieser Fall wird stattfinden für solche Werte von z_0, welche der Bedingung genügen:

$$\frac{\sqrt{(2 z_0 + p)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right)}}{\sqrt{p (3 z_0 + p)}} = 1,$$

d. h.

$$(2 z_0 + p)\left(z_0 + \frac{p}{4}\right) = p (3 z_0 + p),$$

woraus die Gleichung folgt:

$$z_0^2 - \frac{3}{4} p z_0 - \frac{3}{8} p^2 = 0,$$

deren Auflösung liefert:

$$z_0 = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{8} p$$

Das Zeichen — ist zu verwerfen, da es einen negativen Wert von z liefern würde.

Also für:

$$z_0 = \frac{3 + \sqrt{33}}{8} p = 1{,}093 \ldots p$$

ist der Grenzwinkel $\Psi = \pi$, für einen kleineren Wert ist er kleiner, für einen gröfseren Wert gröfser als π. Für diesen speciellen Wert von z_0 tritt im Grenzfall $z_0 = \alpha$ der Fall ein, dafs

Ψ zu 2π im Verhältnis $1:2$ steht, d. h. dafs die Bahn nach einer Rotation geschlossen ist. Die Berührungspunkte liegen sich dann diametral gegenüber. (Fig. 8.)

Auch für andere Werte von z_0 kann der Fall eines kommensurablen Verhältnisses und damit einer geschlossenen Bahn eintreten — nämlich für alle, wofür der Koeffizient von π in (62) eine rationale Gröfse ist. Natürlich haben diese Betrachtungen nur ihren Sinn, wenn wir die Kreisbewegung als Grenzfall der allgemeinen Oscillationsbewegung auffassen, da die Bahn als Kreisbahn natürlich stets geschlossen ist.

§ 12.

Die bisherige Durchführung des Problems bezog sich auf den Fall $z_0 > \alpha$.

Der Fall $z_0 < \alpha$ führt sich einfach auf diesen zurück, indem man z_0 und α vertauscht. Der Punkt z_0 ist dann der tiefste Punkt der Bahn und entspricht dem Punkte α und α ist der höchste Punkt und entspricht dem früheren z_0.

Die Betrachtungen und Resultate bleiben im übrigen dieselben.

Die Gleichungen (28) und (29) gehen durch die Substitution:

$$z = \frac{z_0\left(\alpha + \frac{p}{4}\right) + \frac{p}{4}(\alpha - z_0)\sin^2\varphi}{\left(\alpha + \frac{p}{4}\right) - (\alpha - z_0)\sin^2\varphi}$$

über in:

$$t = M\,\Pi(\varkappa, \lambda, \varphi)$$
$$\psi = \frac{C_1}{z_0\, p} M\,\Pi(\varkappa, \lambda, \varphi)$$

wo:

$$k^2 = \frac{\left(\beta - \frac{p}{4}\right)(\alpha - z_0)}{(z_0 + \beta)\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)} \qquad M = \frac{2}{\mu\sqrt{(z_0 + \beta)\left(\alpha + \frac{p}{4}\right)}}.$$

$$\lambda = -\frac{\alpha - z_0}{\alpha + \frac{p}{4}}. \quad l = \frac{\frac{p}{4}}{z_0} \cdot \frac{\alpha - z_0}{\alpha + \frac{p}{4}}.$$

Es ist also wie oben:

$$-1 < \lambda < -k^2. \qquad 0 < l < +\infty.$$

Es ändern sich also die Transformationen in Thetafunctionen und die übrigen Betrachtungen nicht.

Der Fall, dafs die Centralkraft abstofsend wirkt, läfst sich ganz analog behandeln, indem man einfach statt $m = +\mu^2$ setzt.

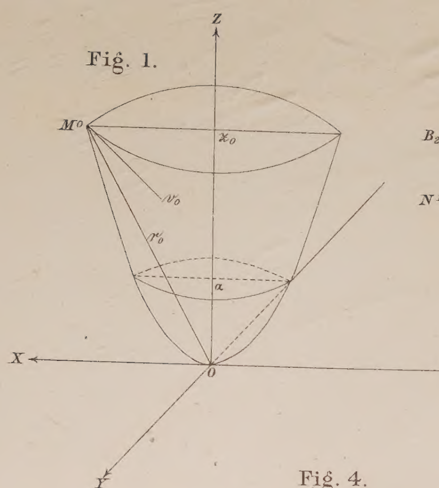


Fig. 1.

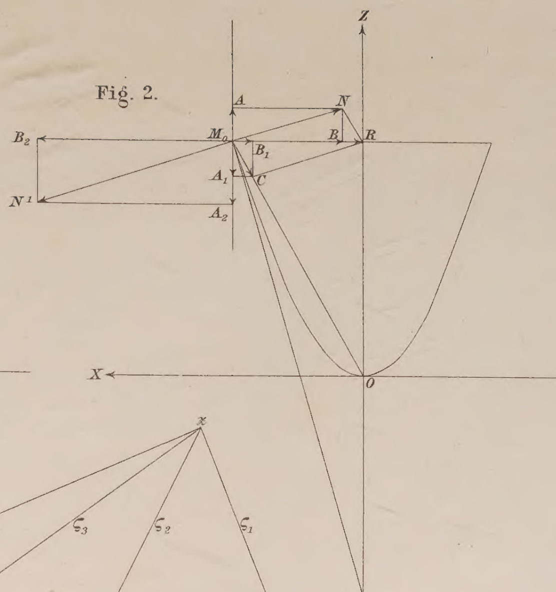


Fig. 2.

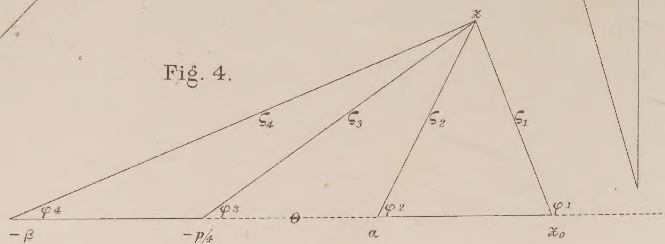


Fig. 4.

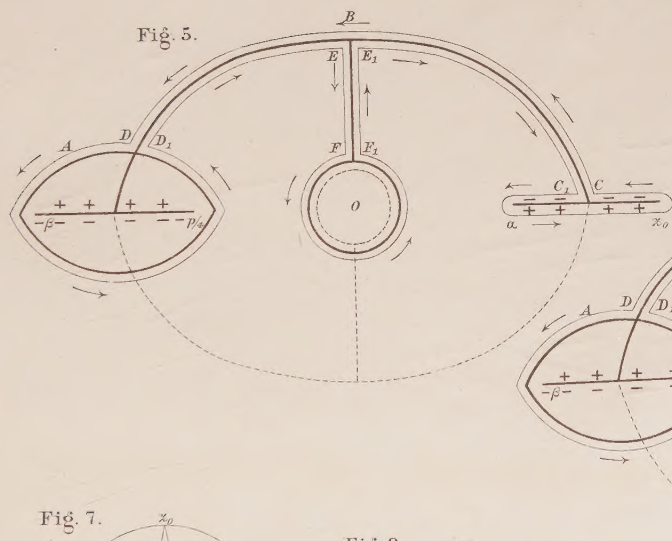


Fig. 5.

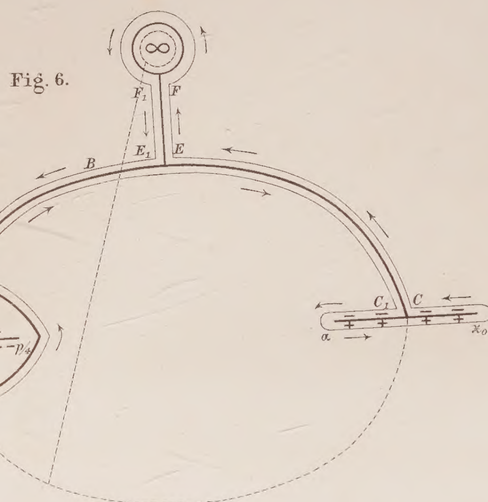


Fig. 6.

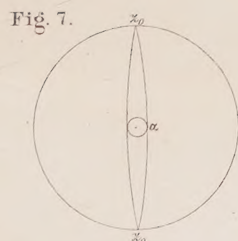


Fig. 7.

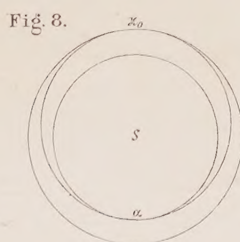


Fig. 8.

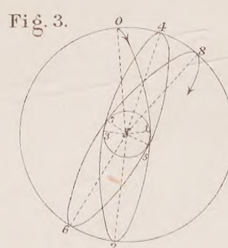


Fig. 3.

Lebenslauf.

Am 14. August 1858 wurde ich, Wilhelm Werner, als Sohn des Försters Adam Joseph Werner und dessen Ehefrau Margaretha, geb. Schott, zu Sandershausen bei Cassel, Provinz Hessen-Nassau, geboren. Nachdem ich bis zum 11. Jahre die Dorfschule zu Nieste bei Cassel besucht hatte, trat ich Ostern 1869 in die Realschule zu Cassel ein, welche ich nach zweijährigem Besuche Ostern 1871 mit dem Knabenpensionat zu Maberzell bei Fulda vertauschte. Nach dessen zweijährigem Besuche bis Ostern 1873 bildete ich mich während des folgenden Jahres durch Privatstudien weiter und trat Ostern 1874 in das Gymnasium zu Fulda ein. Ostern 1879 verliess ich dasselbe mit dem Zeugniss der Reife und studirte dann Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Marburg. Hier bestand ich am 6. Juli 1883 das Examen pro facultate docendi. Hierauf trat ich Michaelis am Königl. Gymnasium zu Ratibor in Schlesien das pädagogische Probejahr an und wurde daselbst Michaelis 1884 als ordentlicher Lehrer angestellt. Von hieraus bestand ich am 16. April 1886 an der Universität zu Marburg das Examen rigorosum.

Allen meinen verehrten Lehrern sage ich meinen besten Dank, vor Allem aber Herrn Prof. Dr. Hess für seine stets gern gewährte Anleitung und seinen freundlichen Rath.